

Kontinuerte systemer.

Vi har hidtil beskæftiget os med diskrete systemer, dvs. systemer, hvis tilstand er beskrevet ved et endeligt antal frihedsgrader (normalt få).

Ved studiet af transportprocesser i et kontinuum - såsom lyd- eller varmeudbredelse - har vi derimod med uendeligt mange frihedsgrader at gøre.

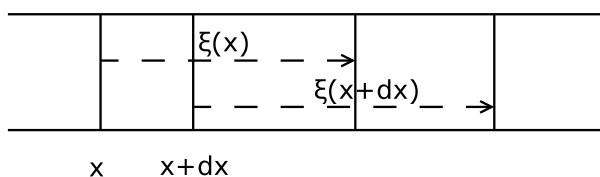
Lydudbredelse.

Lydudbredelse er en samtidig transport af en densitetsændring og en trykændring igennem et medie. Denne transport er betinget af, at mediet både har en masse eller mere præcist en densitet, ρ og endvidere en elasticitet eller mere præcist en kompressibilitet, κ . Kompressibiliteten er defineret som forholdet mellem en trykstigning og den relative kompression den forårsager:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (1)$$

Udbredelsen foregår med en vis hastighed, c , som man kan estimere ud fra et rent dimensionsargument.

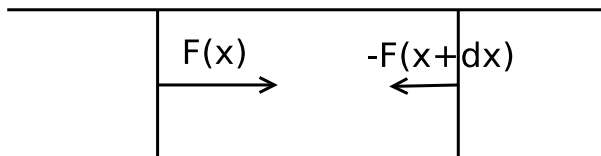
Opgave: Gennemfør dette dimensionsargument.



Figur 1 Forskydningsfeltet.

Lad os nu i detalje se på lydudbredelse i een dimension for $0 \ll x \ll l$. En snitflade, der uforstyrret befandt sig i position x befandt sig til tiden t i positionen $x + \xi(x, t)$ (se figur 1). $\xi(x, t)$ kaldes *forskydningsfeltet*. Læg mærke til, at der er uendelig mange frihedsgrader ξ , nemlig een for hvert x .

Trykket vil vi her beskrive i termer af de tilsvarende kræfter, trykket giver anledning til over tværsnitsarealet, A . Disse kræfter er beskrevet ved et felt $F(x)$. $F(x)$ er kraften, hvormed stoffet på venstre side af snitfladen ved x påvirker stoffet på højre side af snitfladen (se figur 2). Volumenelementet med



Figur 2 Kræfterne, der virker på volumenelementet mellem x og $x + dx$

massen dM mellem x og $x + dx$ påvirkes da af to kræfter, $F(x)$ fra venstre side og $-F(x + dx)$ fra højre side. Hastigheden af elementet er $v = \dot{\xi}$ og accelerationen er $\ddot{\xi} = \dot{v}$. Newtons anden lov giver derfor

$$F(x, t) - F(x + dx, t) = dM \ddot{\xi} \quad (2)$$

hvilket også kan skrives

$$F(x + dx, t) = F(x, t) - dM \dot{v}(x, t) \quad (3)$$

Massen af volumenelementet er proportionalt med dx ,

$$dM = M_l dx = \rho A dx \quad (4)$$

hvor M_l er massen pr. længdeenhed. Ændringen i volumenelements længde er $\xi(x + dx) - \xi(x)$ (se figur 1). Denne ændring er ifølge Hooke's lov proportional med kraften $F(x)$. Det kan vi skrive

$$\xi(x + dx, t) - \xi(x, t) = -dJ F(x, t) \quad (5)$$

Eftergiveligheden (en reciprok fjederkonstant) dJ må selv være proportional med dx og omvendt proportional med tværsnitsarealet A . Altså er

$$dJ = J_l dx = \kappa \frac{1}{A} dx \quad (6)$$

hvor J_l er eftergiveligheden pr. længdeenhed og κ er den føromtalte kompresibilitet. Ligningerne (2) og (4) kan kombineres til

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (7)$$

og (5) og (6) kan kombineres til

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\kappa \frac{1}{A} F \quad (8)$$

Differentieres (8) mht. x og indsættes (7) fås *bølgeligningen*:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (9)$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} \quad (10)$$

Opgave:

Antag, at $f(x)$ angiver et forskydningsfelt til tiden $t = 0$.

Gør rede, for at $\xi(x, t) = f(x - ct)$ da beskriver, at dette felt bevæger sig fremad (som en bølge) med hastighed c .

Hvad er forskellen på c og v ?

Vis, at funktionerne $f(x - ct)$ og $f(x + ct)$ begge opfylder bølgeligningen.

Vi har haft megen nytte af $e^{i\omega t}$ i studiet af diskrete dynamiske systemer. For kontinuerte dynamiske systemer bliver tilsvarende $e^{i(kx + \omega t)}$ nyttig. k kaldes bølgetallet og er den rumlige pendant til vinkelfrekvensen.

Opgave:

Hvad er sammenhængen mellem bølgelængden λ og bølgetallet k af en harmoniske bølge i rummet?

Der kræves en ganske bestemt sammenhæng mellem bølgetallet og vinkelfrekvensen for, at $e^{i(kx + \omega t)}$ kan være en løsning til bølgeligningen (9). Denne sammenhæng kaldes *dispersionsrelationen*.

Opgave:

Find dispersionsrelationen $k(\omega)$.

Udtryk den ved bølgelængden λ og frekvensen ν .

Hvis vi vil lave en netværksmodel af det kontinuerte system, må vi vende tilbage til det differentielle element beliggende mellem x og $x + dx$. For tidsligt

harmonisk varierende felter, $F(x, t) = \text{Re}\{\hat{F}(x)e^{i\omega t}\}$ og $v(x, t) = \text{Re}\{\hat{v}(x)e^{i\omega t}\}$ kan de to ligninger (3) og (5) skrives

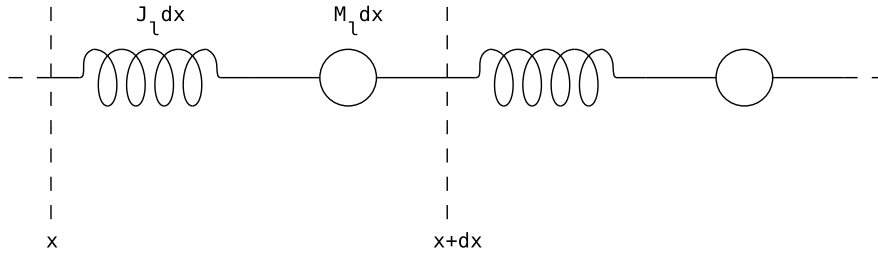
$$\hat{F}(x + dx) = \hat{F}(x) - i\omega dM \hat{v}(x) \quad (11)$$

og

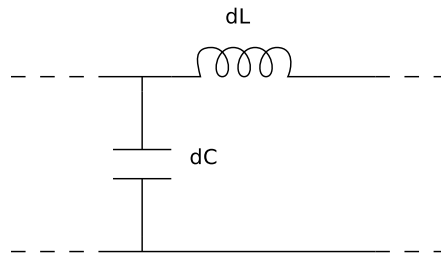
$$\hat{v}(x + dx) = \hat{v}(x) - i\omega dJ \hat{F}(x) \quad (12)$$

Det differentielle element er derfor beskrevet ved en differentiell overføringsmatrix, $\mathbf{dT}$,

$$\begin{pmatrix} \hat{F}(x + dx) \\ \hat{v}(x + dx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i\omega dM \\ -i\omega dJ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{F}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{dT} \begin{pmatrix} \hat{F}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \quad (13)$$



Figur 3 Lydudbredelse. J_l er eftergivelsen pr. længdeenhed og M_l massen pr. længdeenhed.

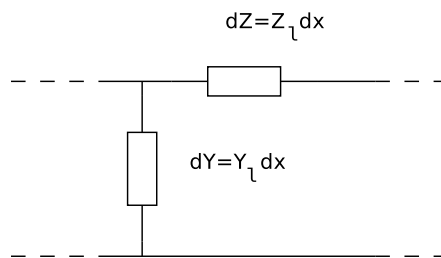


Figur 4 Model af et elektrisk coaxialkabel med selvinduktion dL/dx og kapacitet dC/dx pr. længdeenhed.

Det differentielle element kan illustreres som ved figur 3 eller ved ækvivalentdiagrammet i figur 4. Den kontinuerte beskrivelse fremkommer nu approximativt ved at sammensætte N sådanne led med $dx = l/N$. Dette netværk kaldes *kædelinien*.

Bølgeudbredelse generelt i een dimension.

Bølgeligningen (9) kan kun beskrive udæmpede bølger, altså bølger der bevarer deres form, som tiden går. Imidlertid bruges begrebet bølge meget mere generelt i fysikken om forplantningen af en forstyrrelse af et felt også selv om bølgens form ændres i tiden. Derfor vil vi studere kædelinien mere generelt som illustreret i figur 5, hvor Z_l er den »langsgående« impedans og Y_l er den »tværgående« admittans, begge pr. længdeenhed. Ved at tillade Z_l og Y_l at være komplekse og frekvensafhængige får vi indfanget en lang række andre fysiske udbredelsesfænomener end de, der er beskrevet ved bølgeligningen, f.eks. varmediffusion, transmission af elektromagnetiske bølger med tab (Telegraphers equation) eller puls i arterie.



Figur 5 Generel model af energitransport i dispersivt medium.

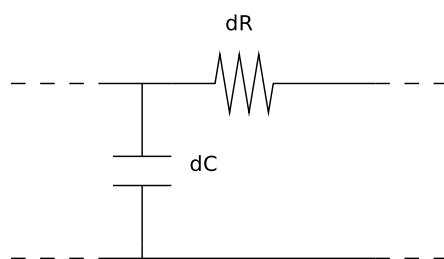
Opgave:

Vis, at endimensionel varmeudbredelse er beskrevet ved ækvivalentdiagrammet i figur 6.

Udtryk R_l og C_l ved varmeledningsevnen λ og den specifikke varmekapacitet c .

Opgave:

Vis, at det ikke spiller nogen rolle for overføringsmatricen $\mathbf{dT}$ (til 2. orden i dx) i hvilken rækkefølge netværkselementerne dZ og dY står.



Figur 6 Model af varmediffusion.