

Impedans

I et kredsløb, der består af andre netværkselementer end blot lække (modstande) og kilder vil der ikke i almindelighed være en simpel proportional, tidslig sammenhæng mellem strøm og spænding, således som vi kender det fra Ohms lov, $U(t) = RI(t)$. F.eks opfylder en kapacitor med kapaciteten C

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad (1)$$

og en spole med selvinduktionen L

$$U = L \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

For et harmonisk varierende spænding- eller strømsignal vil det tilhørende strøm- eller spændingssignal imidlertid også være harmonisk variende. Dette muliggør en udvidelse af modstandsbegrebet til at gælde vekselstrøm, hvis man dog tager højde for skift i fasen. For kapacitoren har vi, at hvis

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_U) \quad (3)$$

bliver

$$I(t) = -\omega C U_0 \sin(\omega t + \phi_U) = \omega C U_0 \cos(\omega t + \phi_U + \frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

Heraf ser man, at strømmen er harmonisk varierende ligesom spændingen; men den er en $1/4$ periode forud. Det kan man forstå fysisk, idet strømmen skal have løbet et stykke tid inden en ladningsmængde og dermed en spænding er bygget op i kapacitoren. En lille mnemoteknisk regel siger, at for en kapacitet kommer i før e, hvilket naturligvis kun giver mening, når man husker at bogstavet e også ofte bruges for spænding. Ønsker vi, at skrive strømmen på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) \quad (5)$$

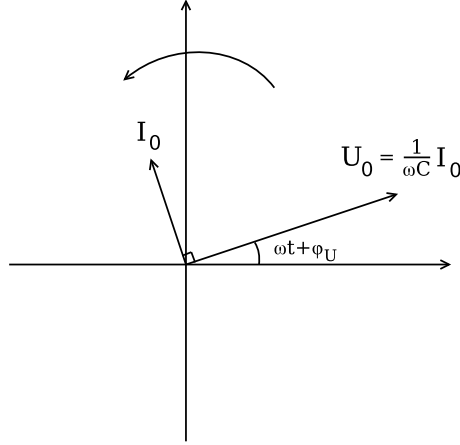
skal vi sætte

$$I_0 = \omega C U_0 \quad (6)$$

og

$$\phi_I = \phi_U + \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Selv om Ohm's lov ikke gælder for øjebliksværdierne af U og I , ser vi af (6), at den gælder for amplituderne, med en "modstand", som er $1/\omega C$.



Figur 1 Fasevektordiagrammet for en kapacitor.

Hvis vi bruger komplekse tal til at beskrive de harmoniske funktioner, kan vi også inddrage fasedrejningen $\frac{\pi}{2}$ på en simpel måde. Cosinus kan jo udtrykkes ved realdelen af den komplekse eksponential funktion, så der gælder

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_U) = \text{Re}\{U_0 \exp(i(\omega t + \phi_U))\} = \text{Re}\{\hat{U} \exp(i\omega t)\} \quad (8)$$

hvor *den komplekse amplitude* $\hat{U}$ er defineret ud fra den reelle amplitude U_0 og fasedrejningen ϕ_U

$$\hat{U} = U_0 \exp(i\phi_U) \quad (9)$$

Ligeså er

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) = \text{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} \quad (10)$$

med

$$\hat{I} = I_0 \exp(i\phi_I) \quad (11)$$

Definerer vi endvidere den komplekse *impedans* eller *vekselstrømsmodstand* til

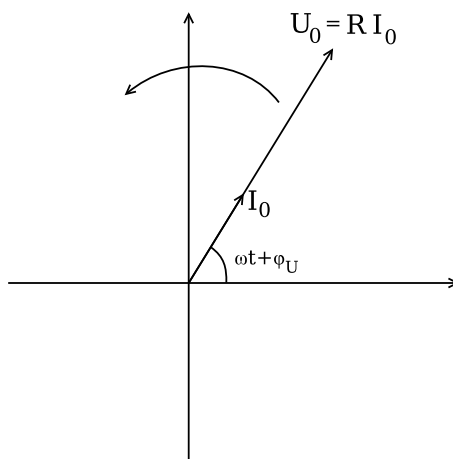
$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} \exp(-i\frac{\pi}{2}) \quad (12)$$

så sammenfattes ligningerne (6) og (7) i den *generaliserede Ohms lov*

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I} \quad (13)$$

Kompleks multiplikation består jo netop i at moduli multipliceres; mens argumenter adderes. Impedans måles i Ohm (Ω) ligesom modstand. Fasevektordiagrammet i figur 1 illustrerer amplitude- og faseforhold mellem strøm og spænding for en kapacitor.

For en almindelig Ohmsk modstand, R er $\hat{Z} = R$, da der ingen fasedrejning er mellem strøm og spænding. Dette illustreres i figur 2.



Figur 2 Fasevektordiagrammet for en modstand.

Nu, hvor vi har introduceret den komplekse notation, kan vi udlede impedansen for en selvinduktion på en lidt anden måde. Vi antager, at strømme og spændinger er komplekse, selv om vi ved, at de i virkeligheden kun er givet ved realdelen af disse størrelser. Det går godt, fordi vi kun opererer med lineære ligninger med reelle koefficienter. Strømmen er altså $I(t) = \hat{I} \exp(i\omega t)$. Indsættes dette i (2) fås

$$U(t) = i\omega L \hat{I} \exp(i\omega t) \quad (14)$$

Hvis dette skal have formen $U(t) = \hat{U} \exp(i\omega t)$, må $\hat{U} = i\omega L \hat{I}$ og dermed

$$\hat{Z} = i\omega L = \omega L \exp(i\frac{\pi}{2}) \quad (15)$$

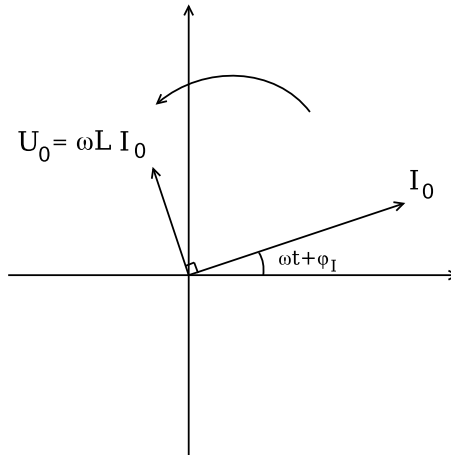
Da $|\exp(i\phi_U)| = 1$ bliver $|\hat{U}| = |U_0 \exp(i\phi_U)| = U_0 |\exp(i\phi_U)| = U_0$. Ligeså er $|\hat{I}| = I_0$ og $|\hat{Z}| = |i\omega L| = |i|\omega L = \omega L$. Tager vi derfor modulus af ligning (13) får vi

$$U_0 = |\hat{U}| = |\hat{Z}\hat{I}| = |\hat{Z}||\hat{I}| = \omega L I_0 \quad (16)$$

Der gælder endvidere $\arg(\hat{U}) = \arg(U_0 \exp(i\phi_U)) = \arg(U_0) + \arg(\exp(i\phi_U)) = 0 + \phi_U = \phi_U$, så tager vi argumentet af (13) får vi

$$\phi_U = \phi_I + \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

For selvinduktionen kommer spændingen altså $1/4$ periode før strømmen. Den mnemotekniske regel siger her, at i selvinduktion kommer e før i. Hvis vi tænker i den mekaniske analogi, hvor en selvinduktion svarer til masse, spænding til kraft, og strøm til hastighed, så kan vi huske dette forhold på en mere fysisk måde. En kraft skal jo have virket over en vis tid, før impulsen og dermed hastigheden er bygget op. Fasevektordiagrammet for en selvinduktion ses på figur 3.



Figur 3 Fasevektordiagrammet for en selvinduktion.

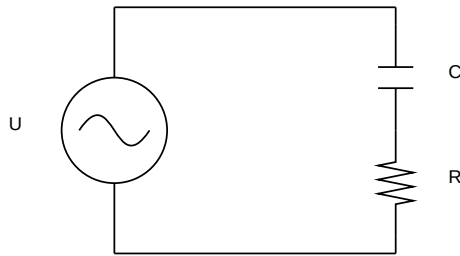
Impedansbegrebet kan også bruges for kredsløb sammensat af simple elementer. Kirchhoffs love er lineære og tricket med at arbejde med komplekse strømme og spændinger undervejs samt tage realdel tilsidst vil derfor virke. Dette fører til, at *impedanser i serie kan adderes*. Sidder de i parallel er det derimod de reciprokke impedanser, der skal adderes. Det er derfor nyttigt at

indføre begrebet *admittans* ved

$$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} \quad (18)$$

Dermed kan vi sige, at *admittanser i parallel kan adderes*.

Der er en vis barriere, der skal overskrides før man bliver fortrolig med denne formalisme; men nytten kan slet ikke overvurderes. Ligningerne til beskrivelse af et elektrisk (eller generelt fysisk) netværk bliver i almindelighed et koblet sæt af integro-differentialligninger (i tidsbilledet). Ser man derimod kun på harmoniske funktioner bliver ligninger blot algebraiske (i frekvensbilledet). Det viser sig ikke at være nogen indskrænkning i studiet af et fysisk systems generelle opførsel, idet et vilkårligt input-signal kan opskrives som en vægtet sum (evt integral) af harmoniske input. Lineariteten sikrer dernæst, at det samlede output er den samme vægtede sum af harmoniske output.



Figur 4 Sinusgenerator med modstand og kapacitet i serie.

Eksempel 1: En modstand R og en kondensator C er forbundet i serie, som på figur(4) med en spændingskilde $U = U_0 \cos(\omega t)$. Nulpunktet for tiden er valgt så $\phi_U = 0$.

1) Bestem strømamplituden I_0 og fasedrejningen ϕ_I for strømmen $I = I_0 \cos(\omega t + \phi_I)$.

Strømmen kan også opløses i en komponent I_A i fase med spændingen og en komponent I_B ude af fase med spændingen, således

$$I(t) = I_A \cos(\omega t) + I_B \sin(\omega t) \quad (19)$$

2) Bestem I_A og I_B .

3) Tegn fasevektordiagrammet.

Ad 1) Impedansen for serieforbindelsen bliver

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} + R$$

og dermed admittansen

$$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + R} = \frac{i\omega C}{1 + i\omega RC}$$

Der vil generelt gælde, at $I_0 = |\hat{Y}|U_0$ og $\phi_I = \phi_Y + \phi_U$. Bevis:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \phi_I) = \operatorname{Re}\{I_0 \exp(i(\omega t + \phi_I))\} \\ &= \operatorname{Re}\{I_0 \exp(i\phi_I) \exp(i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{Y} \hat{U} \exp(i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{|\hat{Y}| \exp(i\phi_Y) U_0 \exp(i\phi_U) \exp(i\omega t)\} \\ &= \operatorname{Re}\{|\hat{Y}| U_0 \exp(i(\omega t + \phi_Y + \phi_U))\} = |\hat{Y}| U_0 \operatorname{Re}\{\exp(i(\omega t + \phi_Y + \phi_U))\} \\ &= |\hat{Y}| U_0 \cos(\omega t + \phi_Y + \phi_U). \end{aligned}$$

Nu er

$$|\hat{Y}| = \left| \frac{i\omega C}{1 + i\omega RC} \right| = \frac{|i\omega C|}{|1 + i\omega RC|} = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

og dermed

$$I_0 = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} U_0$$

Endvidere er

$$\phi_I = \phi_Y = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + i\omega RC) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)$$

Man ser, at modstanden bestemmer strømmen ved høje frekvenser:

$$|\hat{Y}| \rightarrow \frac{1}{R} \quad \text{og} \quad \phi_I \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad \omega \rightarrow \infty$$

og at kapacitansen bestemmer strømmen ved lave frekvenser:

$$|\hat{Y}| \rightarrow \omega C \quad \text{og} \quad \phi_I \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{for} \quad \omega \rightarrow 0$$

Ad 2) Fra udtrykket $I(t) = \operatorname{Re}\{\hat{Y} U_0 \exp(i\omega t)\}$ kan vi gå anderledes frem ved at opdele $\hat{Y}$ i real og imaginær del istedet for at bruge modulus og argument formen,

$$\begin{aligned} I(t) &= U_0 \operatorname{Re}\{(Y' + iY'')(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\} \\ &= U_0 \operatorname{Re}\{(Y' \cos(\omega t) - Y'' \sin(\omega t)) + i(Y' \sin(\omega t) + Y'' \cos(\omega t))\} \\ &= U_0(Y' \cos(\omega t) - Y'' \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Dermed er

$$I_A = U_0 Y' \quad \text{og} \quad I_B = -U_0 Y''$$

Y' og Y'' findes således:

$$\hat{Y} = \frac{i\omega C}{1 + i\omega RC} = \frac{i\omega C(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega^2 RC^2}{1 + (\omega RC)^2} + i \frac{\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$$

Altså er

$$Y' = \frac{\omega^2 RC^2}{1 + (\omega RC)^2} \quad \text{og} \quad Y'' = \frac{\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$$