

Matrixregning

Ved en matrix forstås et talskema, hvor man har organiseret tallene i rækker (vandret) og søjler (lodret), f.eks 2 rækker og 3 søjler som her,

$$M = \begin{pmatrix} 1.2 & .6 & 3.4 \\ 9.0 & 7.4 & 2.2 \end{pmatrix}$$

Elementet i den i 'te række og j 'te søjle kaldes $M_{i,j}$ eller blot M_{ij} . M_{22} er således 7.4. Specielt kalder man en matrix bestående af een række som denne,

$$x = (2 \quad 2 \quad 5)$$

en rækkematrix eller en rækkevektor, mens en matrix bestående af een søjle som denne,

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kaldes en søjlematrix eller søjlevektor. En matrix med n rækker og m søjler kaldes en $(n \times m)$ -matrix. x er således en (1×3) -matrix.

Man indfører nu en række regneregler for matricer. En matrix kan ganges med et tal ved at gange hvert enkelt element i matricen med tallet. Således er

$$2M = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.2 & 6.8 \\ 18.0 & 14.8 & 4.4 \end{pmatrix}$$

To matricer med samme antal rækker og søjler kan adderes ved at addere det (i, j) 'te element i den ene matrix med det (i, j) 'te element i den anden matrix. En $(n \times p)$ -matrix A kan ganges med en $(p \times m)$ -matrix B og giver derved en ny $(n \times m)$ -matrix C . C_{ij} kan beregnes efter formlen,

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ip}B_{pj}$$

Eksempelvis giver $x \cdot y$ en (1×1) -matrix:

$$(2 \quad 2 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (21)$$

Denne specielle version af matrix-multiplikation kaldes også det *indre produkt*. Omvendt giver $y \cdot x$ en (3×3) -matrix, det såkaldte *ydre produkt*:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 2 \quad 5) = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 30 \\ 4 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Når man skal finde matrix produktet $C = AB$ er det nemmest at udføre beregningen ved at tænke på elementet C_{ij} som det indre produkt af den i 'te række i A med den j 'te søjle i B , hvilket kan illustreres således:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dots C_{ij} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & \dots & A_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{pj} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikationsreglen kan bl.a. bruges til at skrive lineære ligningssystemer simpelt op. Tag for eksempel ligningssystemet,

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Hvis vi sætter

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

så kan ligningssystemet skrives

$$A \cdot x = b$$

Løsning af ligningssystemet består i at finde en matrix D , så

$$x = D \cdot b$$

Man kalder D for den inverse matrix af A og betegner den A^{-1} . $A \cdot D$ giver enhedsmatricen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Computerprogrammet Matlab er velegnet til at invertere matricer, d.v.s. at løse ligningssystemer (og alle mulige andre matrixoperationer). Man har ved numerisk databehandling ofte brug for yderligere nogle matrixoperationer, som normalt ikke indgår i den matematiske teori for matricer. Det er elementvis multiplikation og division, der i Matlab noteres som hhv. $\gg$.* $\ll$ og $\gg$./ $\ll$.