

Komplekse tal

En tilegnelse af stoffet i dette appendix kræver at man løser opgaverne

Komplekse tal viser sig uhyre nyttige i fysikken, f.eks. til løsning af lineære differentiaalligninger eller beskrivelse af periodiske bevægelser (harmoniske svingninger). I kvantemekanikken beskrives en partikel ved en kompleks bølgefunktion.

Komplekse tal. De reelle tal er i en vis forstand ufuldstændige. F.eks. kan man spørge: Har ligningen

$$x^2 = -1 \quad (1)$$

en løsning? Nej, i hvert fald ikke, hvis x er et reelt tal. Imidlertid kunne x måske være en anden type objekt, $\boldsymbol{x}$, og blandt denne slags objekter kunne der være indført addition, subtraktion, multiplikation og division. For at skelne objekterne fra reelle tal angiver vi dem foreløbig med fed skrift, men bemærk at de ikke er vektorer. Ligning (1) er da

$$\boldsymbol{x}^2 = -\mathbf{1} \quad (2)$$

eller

$$\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$\mathbf{0}$ -objektet er det, der opfylder $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$, og $\mathbf{1}$ -objektet er det, der opfylder $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{a}$. Dersom objekterne opfører sig algebraisk fuldstændigt som almindelige tal, og hvis en delmængde af dem kan bringes i entydig korrespondance med de reelle tal, så kunne objekterne opfattes som en udvidelse af talbegrebet. Et eksempel på sådanne objekter er talpar $\boldsymbol{a} = (a', a'')$, hvor a' og a'' er reelle tal. *Addition* defineres ved

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a' + b', a'' + b'') \quad (4)$$

Multiplikation defineres ved

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a'b' - a''b'', a'b'' + a''b') \quad (5)$$

Talpar af formen $\mathbf{a} = (a, 0)$, $\mathbf{b} = (b, 0)$ ses at opfylde $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a + b, 0)$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (ab, 0)$. Andenkoordinaten indblandes altså ikke i nogen regneoperation, så vi kan lige så godt opfatte talpar af denne form som reelle tal. De to parenteser, kommaet og 0-et slæbes bare med til besvær. Vi identificerer derfor $\mathbf{1} = (1, 0)$ med 1.

Talpar af formen $\mathbf{a} = (0, a)$, $\mathbf{b} = (0, b)$ ses at opfylde $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, a + b)$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-ab, 0) = -ab$. Specielt er $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Defineres $i = (0, 1)$ bliver

$$i^2 = -1 \quad (6)$$

i kaldes den *imaginære enhed*. Ethvert talpar kan entydigt skrives

$$\mathbf{a} = (a', a'') = (a', 0) + (0, 1)(a'', 0) = a' + ia'' \quad (7)$$

Den sidste notation er lige så god som talpar-notationen; thi vi ved, at det reelle tal uden »i« er 1.-koordinaten, mens det med »i« er 2.-koordinaten. Talparret kaldes et *komplekst tal* og fremover droppes den **fede** notation, der tydeliggjorde forskellen fra reelle tal. a' og a'' kaldes henholdsvis *real-* og *i-imaginærdelen* af a . Et komplekst tal, hvis realdel er nul kaldes et *imaginært tal*.

Alle regneregler, der kendes for reelle tal, såsom den distributive lov $a(b + c) = ab + ac$ kan nemt vises at gælde ved brug af definitionerne (4) og (5). I praksis bruger man ikke formlen (5), når to komplekse tal skal multipliceres, men udnytter de distributive love sammen med (6).

Eksempel:

$$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 3 \cdot 4i + 2i \cdot 1 - 2i \cdot 4i = 3 - 12i + 2i - 8 \cdot (-1) = 11 - 10i$$

Opgave:

Sæt $a = 1 + 2i$, $b = 4 - 3i$. Beregn $a + b$, ab , $4b$, $a - 2b$, $a + ib$

Kompleks konjugering. Hvis a' og a'' er reelle tal og $a = a' + ia''$, så er $a^* = a' - ia''$, det kompleks konjugerede tal til a . Specielt er $i^* = -i$, mens $1^* = 1$. Division af to komplekse tal foregår nemmest ved at forlænge tæller og nævner med den kompleks konjugerede af nævneren

Eksempel:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 2i}{4 - 3i} = \frac{(1 + 2i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4 + 3i + 8i - 6}{16 + 9} = \frac{-2 + 11i}{25} = -0,08 + 0,44i$$

Opgave:

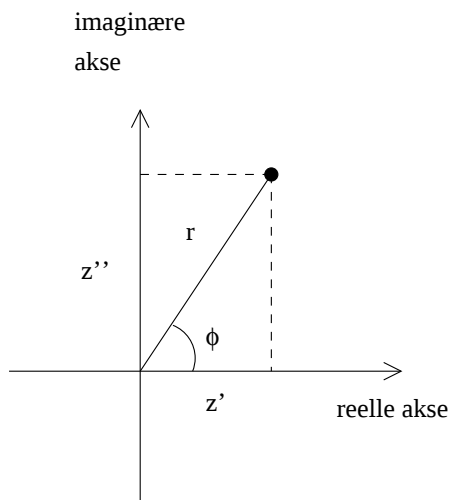
Beregn $3i + \frac{2}{1+i}$

Opgave:

Ved *modulus*, $|a|$ af et komplekst tal, $a = a' + ia''$ forstås $\sqrt{aa^*}$. Vis, at $aa^* > 0$, og udtryk modulus ved a' og a'' . Bestem modulus af $3 + 4i$.

Geometrisk fremstilling. Et komplekst tal z kan grafisk afbildes som et punkt i den såkaldt komplekse plan, idet projektionen på 1.-aksen er realdelen, z' og projektionen på 2.-aksen er imaginærdelen, z'' (Se figur). Længden af liniestykket fra $(0,0)$ til punktet, der markerer z er netop modulus, $|z|$ af z . Vinklen, ϕ dette liniestykke danner med den reelle akse kaldes *argumentet*, $\arg(z)$ af z . Man ser

$$z' = |z| \cos(\phi) \quad z'' = |z| \sin(\phi) \quad (8)$$



Figur 1 geometrisk fortolkning af et komplekst tal

For modulus $|z|$ benyttes ofte betegnelse r . Talparret (r, ϕ) repræsenterer z lige så godt som z' og z'' . Det kaldes en polær fremstilling. Vi har altså

$$z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \quad (9)$$

og omvendt

$$r = \sqrt{(z')^2 + (z'')^2} \quad \tan(\phi) = \frac{z''}{z'} \quad (10)$$

Den polære fremstilling viser sig at være nyttig ved multiplikation af komplekse tal. Lad z og w være to komplekse tal. Sæt $r = |z|$, $\phi = \arg(z)$ og $q = |w|$, $\psi = \arg(w)$. Da er altså $z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$ og $w = q(\cos(\psi) + i \sin(\psi))$. Udregnes produktet fås

$$\begin{aligned} zw &= rq(\cos(\phi) + i \sin(\phi))(\cos(\psi) + i \sin(\psi)) \\ &= rq\{\cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi) + i(\cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi))\} \end{aligned} \quad (11)$$

Ifølge de såkaldte additionsformler for cosinus og sinus er

$$\cos(\phi + \psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)$$

og

$$\sin(\phi + \psi) = \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi)$$

Disse kan findes i en formelsamling eller udledes geometrisk. Det betyder, at

$$zw = rq(\cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi)) \quad (12)$$

hvoraf man ser

$$|zw| = rq = |z||w|$$

og

$$\arg(zw) = \phi + \psi = \arg(z) + \arg(w)$$

Multiplikation af komplekse tal foregår altså ved at multiplicere modulerne og addere argumenterne.

Opgave:

Beskriv geometrisk, hvad der sker, når man ganger et komplekst tal med i .

Opgave:

Vis, at $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ og $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$

Komplekse funktioner. En kompleks funktion afbilder et komplekst tal over i et andet, f.eks $f(z) = z^3$ eller $f(z) = |z|^2 = zz^*$. To andre funktioner er realdelen af z ,

$$\operatorname{Re}(z) = z' = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

og imaginærdelen af z

$$\operatorname{Im}(z) = z'' = \frac{1}{2}(z - z^*)$$

Eksponentialfunktionen. Lad ϕ være et reelt tal. Funktionen $f(\phi)$ defineret ved $f(\phi) = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ opfylder som vi tidligere har set, at $f(\phi_1 + \phi_2) = f(\phi_1)f(\phi_2)$. Denne funktionalligning genkender vi fra eksponentialfunktionen: $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$. Derfor giver det god mening, at definere eksponentialfunktionen for det imaginære tal $i\phi$ som

$$e^{i\phi} = \exp(i\phi) = \cos(\phi) + i \sin(\phi) \quad (13)$$

idet, der da vil gælde $e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1}e^{i\phi_2}$. Mere generelt er den komplekse eksponentialfunktion for et komplekst tal $z = z' + iz''$ givet ved

$$e^z = e^{z'}(\cos(z'') + i \sin(z'')) \quad (14)$$

Denne funktion er uden overdrivelse den vigtigste i matematisk fysik.

Hvis $\phi = \arg(z)$ kan vi nu skrive (8) som

$$z = |z|e^{i\phi} \quad (15)$$

Opgave:

Vis, at $e^{-i\phi} = (e^{i\phi})^*$

Vis, at

$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ og

$\sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$

Find de to løsninger til $x^2 = i$. Find de fire løsninger til $x^4 = -1$

Opgave:

Definer for reelle x

$$f(x) = \frac{1}{1+ix}$$

Brug Matlab til at vise graferne for $(x, f'(x))$, $(x, f''(x))$ og $(f'(x), f''(x))$.

Den sidste graf kaldes et Argand diagram eller et Nyquist plot.

Bevis, at denne graf er en halvcirkel med centrum i $(\frac{1}{2}, 0)$ og radius $\frac{1}{2}$.

Gentag opgaven for funktionen

$$f(x) = \frac{ix}{1+ix}$$