

Ohms lov

Vi vil samle os en række byggestene, som kan bruges i modelleringen af fysiske systemer. De første to var hhv. en spændingskilde og en strømkilde. Disse elementer (sources) er aktive og kan tilføre et system energi. Det tredje element forbruger altid energi og kaldes en *læk* (sink).

Elektriske strømme. Vi kender en læk fra elektriske kredsløb som en modstand. En modstand, R giver ifølge Ohms lov en tidsuafhængig proportionalitet mellem strøm, I og spændingsfald, U .

$$U = RI$$

Lad os diskutere de indgående størrelse mere detaljeret. En elektrisk strøm er en bevægelse af elektrisk ladede partikler. Dette havde man allerede en formodning om, inden man fandt nærmere ud af beskaffenheden af disse partikler. Man talte således om, at strømmen løb fra plus til minus på et galvanisk element (batteri), i den tro, at det var positive partikler, der bevægede sig. I et fast stof er det dog sædvanligvis en strøm af negative elektroner, der bevæger sig den modsatte vej. Det gælder eksempelvis i et metal. Imidlertid opretholder man konventionen om, at strømmen løber fra plus til minus, idet man normalt ikke kan se forskel på effekten af, at positive partikler løber den ene vej, eller at negative partikler løber den modsatte vej. Elektrisk ladning måles i en enheden Coulomb, og der skal mange elektroner til en Coulomb, da elektrones ladning numerisk er $e = 1.602 \cdot 10^{-19}C$.

Det elektriske potential er knyttet til begrebet potentiel energi. Hvis man placerer en (test-)ladning, q et sted $\mathbf{r}$ i rummet, hvor der også er andre ladninger til stede, vil den være påvirket af kræfter fra disse andre ladninger og være i stand til at udføre arbejde. Det arbejde, partiklen potentielt ville kunne udføre, kaldes den potentielle energi, $E_{pot}(\mathbf{r})$, og er afhængigt af stedet $\mathbf{r}$. Den potentielle energi er proportional med testladningen selv, og derfor er den potentielle energi pr. ladning en veldefineret størrelse. Den kaldes potentialet,

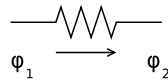
$\phi(\mathbf{r})$. Der gælder altså

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$$

Enheden for potentialet er derfor Joule pr. Coulomb, J/C , og denne enhed kaldes også Volt, V .

For at få fortegnene i Ohms lov til at harmonere med den fysiske situation, er man nødt til at indføre en orienteringskonvention, se figur 1. Man tegner en pil ud for modstanden. Denne pil angiver i hvilken retning, man anser strømmen for positiv. Hvis den virkelige strøm går den modsatte vej, betyder det blot, at I er negativ. Spændingsfaldet $U = \phi_1 - \phi_2$ er differencen mellem potentialet ϕ_1 for foden af pilen og potentialet ϕ_2 for enden af pilen. Læg mærke til at spændingsfaldet er minus potentialstigningen, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$,

$$U = -\Delta\phi$$



Figur 1 Sammenhængen mellem potential, ϕ og spændingsfald, U : $U = -\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$.

Modstanden R måles i Ohm, Ω . Modstanden afhænger af materialet; men også af geometriske faktorer for lederen. For en ledning af længden l og med konstant tværsnitsareal A bliver modstanden

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

hvor ρ , den specifikke modstand er den materialeparameter, man kan slå op i en databog. Ofte angives den reciprokke størrelse, den specifikke ledningsevne, $\sigma = 1/\rho$ i stedet.

Opgave: Et materiale med den specifikke modstand ρ befinder sig mellem to cylinderflader med radier r_1 og r_2 og længden l . Cylinderfladerne er godt ledende elektroder. Hvad bliver modstanden af materialet mellem de to elektroder?

Opgave: Som den foregående; men nu mellem to kugleflader?

Indføres den specifikke modstand kan vi skrive Ohm's lov

$$U = \rho_A^l I$$

eller

$$-\frac{\Delta\phi}{l} = \rho_A^l \frac{I}{A}$$

Spændingsfaldet pr. længdeenhed, $-\frac{\Delta\phi}{l}$ kaldes det elektriske felt, betegnes E og måles i V/m . Strømstyrken pr. fladeenhed, $\frac{I}{A}$ kaldes strømtætheden, betegnes j og måles i A/m^2 . Endvidere kan de begge karakteriseres ved en retning i rummet; de er altså vektorer. Vi kan derfor reformulere Ohm's lov til

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \text{ eller } \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

På denne form refererer ingen af størrelserne direkte til geometrien af lederen.

Opgave: Gør rede for, at kraften $\mathbf{F}$ på en ladning q er $q\mathbf{E}$. (Hjælp: Hvad er relationen mellem kraft og potentiel energi?)

Termiske strømme. For varmeledning knyttes varmestrømtætheden $\mathbf{j}_h$ i W/m^2 til temperaturgradienten ∇T ved *Fourier's lov*

$$\mathbf{j}_h = -\lambda \nabla T$$

λ kaldes den specifikke varmeledningsevne. Man ser at Fourier's lov er fuldstændig analog til Ohm's lov, idet $-\nabla T$ angiver hvor meget temperaturen falder pr. meter i retning af varmestrømmen, ligesom det elektriske felt angiver, hvor meget det elektriske potential falder pr. meter.

Opgave: En ydervæg af mursten beklædes med et isoleringsmateriale. Over hvilket lag bliver temperaturfaldet størst?

Opgave: Hvorledes afhænger varmestrømtætheden af radius i isoleringen omkring et fjernvarmerør? Hvordan ser temperaturprofilen ud?

Opgave: En kugleformet varmekilde med radius r er placeret i et uendeligt stort medium med varmeledningsevnen λ . Kilden producerer en konstant effekt P . Hvor stor er temperaturen ved kilden sammenlignet med fjernt fra kilden.

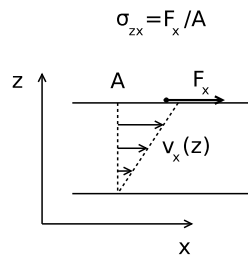
Væskestrømning. En væske, der strømmer, taber energi ved, at de enkelte væskeelementer har forskellig hastighed, og dermed gnider mod hinanden. Den

kinetiske energi omsættes herved til varme; men til gengæld vil trykforskelle kunne tilføre ny energi, og derved muliggøre en stationær strømning.

Friktionen kvantificeres ved en materialeparameter, der kaldes viskositeten η . Man skal forestille sig en stationær væskestrømning mellem to store parallelle plader med en lille afstand imellem. Pladerne står vinkelret på z -aksen, den nederste plade holdes stille, mens den øverste bevæges med en konstant hastighed i x -aksens retning. Derved opstår en lineær hastighedsprofil $v_x(z)$. Det viser sig eksperimentelt for mange væsker (såkaldt Newtonske), at der skal en konstant kraft F_x til at opretholde bevægelsen, og at kraften er proportional med pladearealet A og omvendt proportional med pladeafstanden. Kraften pr. areal betegnes tangentialspændingen σ_{zx} . (Index z angiver, at fladen er vinkelret på z -aksen, og index x angiver, at kraften går i x -aksens retning.) Der gælder altså

$$\sigma_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

hvilket igen er en analog til Ohm's lov.



Figur 2 Ved laminar strømning af en Newtonsk væske er der proportionalitet mellem tangential spænding σ_{zx} og hastighedsgradient $\frac{\partial v_x}{\partial z}$.

Hvis væsken strømmer i et cylindrisk rør bliver hastighedsprofilen anderledes. Vi må forvente, at volumenstrømmen $\dot{V}$ er proportional med det drivende trykfald $-\Delta p$, og omvendt proportionalt med længden l af røret og viskositeten, η . Af dimensionsgrunde kan man da se, at $\dot{V}$ ydermere må være proportional med rørets radius r i 4. potens.

Opgave: Gennemfør dette dimensionsargument.

En nøjere beregning viser at hastighedsprofilen bliver parabolisk, med maximal hastighed i midten af røret. Middelhastigheden må således vokse kvadratisk med radius r , og da $\dot{V}$ er produktet af middelhastigheden og tværsnitsarealet kan man forstå fysikken bag den 4. potens. Den nøjere udregning fastlægger også proportionalitetsfaktoren og resultatet angives normalt som *Poiseuille's lov*,

$$\dot{V} = -\Delta p \frac{\pi r^4}{8\eta l}$$

Definerer vi fluidmodstanden $R_f = -\Delta p / \dot{V}$ bliver

$$R_f = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

Opgave: Lad hastighedsprofilen i røret være $v_z(r)$. Opskriv kræfterne, der virker på en tynd cylinderskal mellem radierne r og $r + dr$. Udnyt dette til at opstille en differentiaalligning for $v_z(r)$. Løs denne. Hvad er randbetingelserne. Find volumenhastigheden og dermed Poiseuille's lov.

Viskositeten optræder også i formen for den gnidningskraft, F en kugle med radius r møder, når den trækkes igennem en væske med hastigheden v . Det er *Stoke's formel*

$$F = 6\pi\eta r v$$

Den mekaniske modstand $R_m = F/v$ er altså $6\pi\eta r$.

Opgave: En kugle nedsænket i en væske slippes og begynder at falde. Gør rede for, at hastigheden vokser op til en maksimal hastighed v_∞ , og bestem denne. Bestem en karakteristisk tidsskala for hastighedens opvoksen fra 0 til v_∞ . Find et udtryk for $v(t)$.