

Lineær Response Teori.

I responseteorien interesserer man sig for, hvad der kan siges generelt om sammenhængen mellem input $\phi(t)$ og output $\gamma(t)$ for et system.

Valg af variable.

Det betragtede systems forskellige vekselvirkninger med omgivelserne kaldes for *energibånd*. Til hvert energibånd vil der være knyttet to såkaldte konjugerede variable, den generaliserede spænding, *effort*, e og den generaliserede strøm, *flow*, f . Produktet $e \cdot f$ skal angive en art overført energimængde pr. tid. Strøm-variablen genkendes på, at den vil skifte fortegn ved tidsvending, mens spændings-variablen ikke vil gøre det. Herudover defineres to ekstra variable: *forskydningen* q , der er tidsintegralet af strømmen, og *impulsen* p , der er tidsintegralet af spændingen.

Ved at fastlægge vor beskrivelse af systemer i disse termer bliver det let at angive analogier mellem forskellige fysiske systemer. Som eksempler kan nævnes, at de konjugerede variable i et termisk energibånd kunne være Carnotfaktoren $1 - T_0/T$ ¹ og varmemstrømmen J_Q . I et mekanisk energibånd kunne det være normalspændingen σ og volumenstrømmen J_V . I elektriske energibånd svarer e til spændingsforskel U , f til strøm I , q til ladning Q og p til magnetisk fluks Φ_B .

Lineære systemer med hukommelse.

I den lineære responseteori antager vi, at for tilstrækkeligt små påvirkninger vil der være en lineær sammenhæng mellem input, ϕ og output, γ ; men der kan godt være en "after effect". Ændringen $d\phi(t')$ i ϕ til tiden t' giver således et bidrag til ændringen $d\gamma(t)$ i γ til tiden t :

$$d\gamma(t) = R(t, t')d\phi(t') = R(t - t')d\phi(t'), \quad (1)$$

hvor vi yderligere har antaget, at denne ændring kun afhænger af tidsforskellen (tidshomogenitet). Da response må komme efter stimuli må R være 0 for $t < t'$, altså

$$R(t) = 0, \quad \text{for } t < 0 \quad (\text{kausalitet}) \quad (2)$$

¹ Hvilket blot er den relative temperaturvariation $(T - T_0)/T_0$ for små temperaturændringer

Opsummering af alle bidragene fra $t' = -\infty$ til $t' = t$ giver

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \int_{-\infty}^t R(t-t')d\phi(t') = \int_{-\infty}^t R(t-t')\dot{\phi}(t')dt' \\ &= \int_0^\infty R(t'')\dot{\phi}(t-t'')dt''.\end{aligned}\tag{3}$$

Her er $\dot{\phi}$ den afledede af ϕ . Hvis vi indfører kompositionen $\circ$ som kort skrivemåde for den lineære operation “foldning med den tidsafledede” så kan ligning (3) skrives

$$\gamma = R \circ \phi.\tag{4}$$

Bemærk, at dimensionen af R bliver $\dim(\text{output})/\dim(\text{input})$.

Responsefunktionernes navne.

Afhængigt af typen af input og output giver vi responsefunktionen R forskellige navne. γ og ϕ kan hver især være f, q, e, p ; men de må tilhøre hver sin kausale klasse. Hvis således ϕ er e eller p skal γ være f eller q og vice versa. Dette giver otte mulige responsefunktioner, hvoraf dog to er identiske med to andre således, at der kun er 6:

Med input fra *spændingsklassen*:

Krybefunktionen (compliance) $J, q = J \circ e,$

Admittansen $Y, f = Y \circ e,$

Letheden $F, f = F \circ p.$

Med input fra *strømklassen*:

Stivheden (modulus) $G, e = G \circ q,$

Impedansen $Z, e = Z \circ f,$

Inertansen $M, p = M \circ f.$

Een af responsefunktionerne er nok til at karakterisere et system, idet de seks funktioner hænger matematisk sammen. Når man alligevel ikke blot nøjes med en af dem, er det fordi, det eksperimentelt kan være praktisk at kunne bestemme, hvilke variable (input), der styres, og hvilke (output), der måles. I en teori vil det også være forskelligt hvilken r.f., det er mest naturligt at betragte. Skemaet giver et overblik over definitionen af de forskellige responsefunktioner

γ $\diagdown$ ϕ	q ladning forskydning	f strøm hastighed	e spænding kraft	p magn. fluks impuls
q ladning forskydning			G modulus stivhed	
f strøm hastighed			Z impedans modstand	M inertans masse
e spænding kraft	J compliance krybefunktion	Y admittans bevægelighed		
p magn. fluks impuls		F lethed		

Tabel 1 Skema over response-funktionerne, R og de mulige relationer, $\gamma = R \circ \phi$ mellem input, ϕ og output, γ . Operatoren $\circ$ er "foldning med den tidsafledede" i tidsbilledet, men simpel multiplikation i frekvensbilledet.

Tidsbilledet.

Lad stimuli (input) være en pludselig ændring i ϕ fra 0 til ϕ_0 til tiden $t = 0$ (en stepfunktion). Det kan vi udtrykke ved hjælp af Heaviside funktionen

$$E(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

idet vi da har $\phi(t) = \phi_0 E(t)$. Differentierer vi Heaviside funktionen får vi deltafunktionen $\delta(t)$, der er 0 overalt undtagen for $t = 0$, hvor den til gengæld er så uendelig, at integralet af den er 1². Da er

$$\gamma(t) = \int_0^\infty R(t') \phi_0 \delta(t - t') dt' = \phi_0 R(t) \quad (6)$$

Responsefunktionen $R(t)$ er altså simpelthen svaret $\gamma(t)$ på et enhedsstep i stimuli til tiden $t = 0$, og kan derfor måles ved et såkaldt stepresponse forsøg.

Frekvensbilledet.

Formel (3) udtrykker, at output er givet ved at folde den tidsafledede af input med responsefunktionen. Ved en Fouriertransformation overgår foldning til produkt, differentiation til multiplikation med $i\omega$ og integration til division med $i\omega$. Derfor vil diskussionen ofte være lettere i frekvensbilledet.

Betragt derfor et periodisk input $\phi(t) = \phi_\omega e^{i\omega t}$. Da ligningerne er lineære, kan vi gerne regne med det komplekse input og tage realdel til sidst. Vi får

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_0^\infty R(t') (i\omega) \phi_\omega e^{i\omega(t-t')} dt' \\ &= (i\omega) \phi_\omega e^{i\omega t} \int_0^\infty R(t') e^{-i\omega t'} dt' \end{aligned} \quad (7)$$

² Det lyder selvfølgelig matematisk forkert; men de matematiske indvendinger kan man komme til livs ved blot at bruge en differentiabel funktion, der ligner Heaviside-funktionen undtagen i et tidsinterval, τ efter 0, der er meget kort i forhold til nogen relevant fysisk tid. Deltafunktionen er opfundet af Dirac og meget benyttet i fysikken. Den er normalt defineret symmetrisk omkring 0; men i responseteorien skal approksimationerne til Heaviside og deltafunktionen kun leve for $t > 0$ af hensyn til kausalitet. Mere præcist burde vi derfor skrive $E(t - 0^+)$ og $\delta(t - 0^+)$, da Heaviside-funktionen skal være forskudt et infinitesimalt stykke væk fra 0, så dens afledede, deltafunktionen kun lever inden for integrationsområdet i (6). Man integrerer altså først med $\delta(t - \epsilon)$ og foretager grænseovergangen $\epsilon \rightarrow 0$ bagefter. En realisering af Heaviside funktionen, der er kausal, kunne være grænsen for $\tau \rightarrow 0$ af funktionerne $H_\tau(t) = \{0 \text{ for } t \leq 0, e^{-\tau/t} \text{ for } t > 0\}$.

Udregningen viser, at et harmonisk input resulterer i et harmonisk output. Skriver vi $\gamma(t) = \gamma_\omega e^{i\omega t}$, ser vi

$$\gamma_\omega = \hat{R}(\omega)\phi_\omega, \quad (8)$$

hvor

$$\hat{R}(\omega) = i\omega \mathcal{F}\{R, \omega\}, \quad (9)$$

og $\mathcal{F}\{R, \omega\}$ er den Fouriertransformerede af $R(t)$,

$$\mathcal{F}\{R, \omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (10)$$

Her kunne nedre grænse føres til $t = -\infty$, som normalt i en Fouriertransformation pga. kausalitetsbetingelsen (2). Læg mærke til, at der udover Fouriertransformation skal ganges med $i\omega$. *Frekvensresponsefunktionen* $\hat{R}(\omega)$ bliver derved den funktion, som man naturligt ville måle og definere ved (8) i et forsøg med harmonisk varierende input. $\hat{R}(\omega)$ har således samme dimension som $R(t)$, og grænseopførslerne $\hat{R}(\omega)$ for $\omega \rightarrow 0$ eller ∞ vil svare til henholdsvis $R(t)$ for $t \rightarrow \infty$ eller 0. Skrives frekvensresponsefunktionen på modulusargument form: $\hat{R}(\omega) = |\hat{R}(\omega)|e^{i\theta_\omega}$ bliver $\gamma(t) = |\hat{R}(\omega)|e^{i(\omega t + \theta_\omega)}$, så θ_ω angiver, hvor mange radianer $\gamma(t)$ er fasedrejet forud i forhold til $\phi(t)$, mens $|\hat{R}(\omega)|$ angiver amplitudeforholdet $|\gamma_\omega|/|\phi_\omega|$.

Tilbagevendende til $R(t)$ sker ved invers Fouriertransformation

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

Laplace-Stieltjes transformation.

Fouriertransformationen kan analytisk udvides til at gælde for komplekse frekvenser $\omega = \omega' + i\omega''$. I den nedre halvplan, hvor $\omega'' < 0$ kan dette stadig findes ved (10) idet faktoren $e^{\omega'' t}$ får integralet til at konvergere for $t > 0$, mens denne faktor ikke skaber problemer for $t < 0$, fordi $R(t) = 0$ her. Man indfører ofte Laplace-frekvensen $s = i\omega$ og definerer s -frekvensresponsefunktionen $\tilde{R}(s)$ ved

$$\tilde{R}(s) = s \int_0^{\infty} R(t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}\{R, s\} \quad (12)$$

altså s gange den Laplacetransformerede af $R(t)$. Frekvensresponsefunktionen kan nu fås ved

$$\hat{R}(\omega) = \lim_{s \rightarrow i\omega, s' > 0} \tilde{R}(s) \quad (13)$$

Relationer mellem responsefunktionerne.

I frekvensbilledet bliver sammenhænge mellem responsefunktionerne meget simple:

Inden for de to klasser:

$$\tilde{M} = \frac{1}{s}\tilde{Z} = \frac{1}{s^2}\tilde{G} \quad , \quad \tilde{J} = \frac{1}{s}\tilde{Y} = \frac{1}{s^2}\tilde{F} \quad (14)$$

Mellem de to klasser:

$$\tilde{J} = \frac{1}{\tilde{G}} \quad , \quad \tilde{Y} = \frac{1}{\tilde{Z}} \quad , \quad \tilde{F} = \frac{1}{\tilde{M}} \quad (15)$$

I tidsbilledet er det derimod kun inden for samme kausalitetsklasse, at det er enkelt at omregne (ved integration eller differentiation). Skift fra den ene klasse til den anden kræver løsning af en integralligning, som i praksis lettest løses ved netop at gå til frekvensbilledet.

Sammensatte systemer.

Det er let at indse at, hvis to systemer sammensættes med en Kirchhoff strøm-samler (maske), dvs. så de har fælles strøm, mens den resulterende spænding er summen af delspændingerne, så er sammensætningen additivt i strømklasse responsefunktionerne (G, Z, M) . Omvendt, hvis to systemer sammensættes med en Kirchhoff spændingssamler (knude), dvs så de har fælles spænding, mens den resulterende strøm er summen af delstrømmene, så er sammensætningen additiv i spændingsklasse responsefunktionerne (J, Y, F) . Ved brug af dette samt skift mellem klasserne kan man opstille responsefunktioner for meget komplicerede fysiske netværk.