Jørgen Larsen
15. oktober 2004

Afleveringsopgaver, sæt 3

1 opgave 8.4 i bogen (hydrolysering af urea)

– De allerfleste udregninger er foretaget i forvejen.

2 π^--mesoner

Betragt følgende problemstilling:

> I kernefysik er man interesseret i at undersøge den såkaldte stærke vekselvirkningskraft der blandt andet er ansvarlig for at holde sammen på atomkernernes partikler, selv om mange af disse har positiv elektrisk ladning og derfor skulle frastøde hinanden. Fysikerne kan få et indtryk af nogle sider af denne kraft gennem eksperimenter der går ud på med stor hastighed at sende visse elementarpartikler ind mod andre elementarpartikler; når partiklerne kolliderer, sker der forskellige omdannelser, og man stiller sig op og måler hvad det er der kommer ud af kollisionen.
>
> I ét sådant forsøg[1] bombarderer man protoner med nogle partikler der hedder π^--mesoner. Eksperimentator kan selv bestemme partiklernes impuls p (impuls er masse gange hastighed); kvadratet på den totale energi er givet ved $E^2 = 2mp$ hvor m er protonens masse. Ved sammenstødet dannes forskellige partikler, og man tæller blandt andet hvor mange π^--mesoner der sendes ud i en bestemt retning; derved fås det såkaldte spredningstværsnit $\Delta\sigma$ som stort set er antal partikler registreret af måleapparatet pr. sekund divideret med antal partikler udsendt pr. sekund. Forsøgsresultaterne er vist i Tabel 1. De enkelte målinger er gentaget så mange gange at fysikerne hævder at de har en præcis værdi for standardafvigelsen på $\Delta\sigma$-værdien.
>
> Visse fysiske teorier forudsiger at sammenhængen mellem $\Delta\sigma$ og E er af formen
>
> $$\Delta\sigma = \alpha + \beta E^{-1} + \text{noget småt};$$

1 H. Weisberg m.fl. (1978): *s*-dependence of proton fragmentation by hadrons. II. Incident laboratory momenta $30 - 250\,\mathrm{GeV}/c$. *Phys. Rev. D,* **17,** 2875-2887.

Tabel 1 Målinger på π^--mesoner. Impulsen p er opgivet i GeV ($= 10^9$eV), størrelsen E^{-1} er opgivet i GeV^{-1}, og spredningstværsnittet $\Delta\sigma$ samt dets standardafvigelse er opgivet i 10^{-34}m^2.

p	E^{-1}	$\Delta\sigma$	st.afv.
4	0.345	367	17
6	0.287	311	9
8	0.251	295	9
10	0.225	268	7
12	0.207	253	7
15	0.186	239	6
20	0.161	220	6
30	0.132	213	6
75	0.084	193	5
150	0.060	192	5

muligvis skal man dog have et andengradsled med, altså

$$\Delta\sigma \quad = \quad \alpha + \beta_1 E^{-1} + \beta_2 E^{-2} + \text{noget småt.}$$

De indgående parametre har en fortolkning og betydning i den fysiske model.

Det statistiske problem består i at estimere de ukendte parametre (og deres middelfejl), og eventuelt afgøre om andengradsleddet skal med eller ej.

Formulér en statistisk model for det foreliggende datasæt, og løs det statistiske problem.

Uddybning:

- Hvad skal opfattes som observationer af stokastiske variable? Hvad rolle skal de andre størrelser spille?
- Lad os sige at observationerne kan betragtes som værende observationer af normalfordelte stokastiske variable. Hvad er disses middelværdi og varians?
- Modellen er på afgørende måde forskellig fra de modeller der optræder i kapitel 8; hvordan?
- Man kan (derfor) ikke udregne $\widehat{\alpha}$ og $\widehat{\beta}$ efter de sædvanlige formler (fra side 107). Man er i stedet henvist til at opskrive likelihoodfunktionen L (eller log-likelihoodfunktionen $\ln L$) og finde dens stationære punkter, altså punkter (α, β) hvor $\dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ og $\dfrac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ (eller $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$ og $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0$). – Gør det. (Få evt. R til at foretage de numeriske beregninger.)