Jørgen Larsen
30. oktober 2014

Vedr. Itōs formel

Dette notat er skrevet i et forsøg på at søge at forstå idéen i Itō's formel (formel (6.9) på side 147 i bogen).

Vi begynder med at repetere lidt calculus. Hvis $g(t)$ er en to gange kontinuert differentiabel reel funktion, så er[1]

$$g(t+\Delta t) - g(t) = \frac{dg}{dt}\,\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dt^2}\,(\Delta t)^2 + o\Big((\Delta t)^2\Big). \tag{1}$$

Antag nu at $g(t)$ er af formen $g(t) = f(x(t), t)$, hvor $x(t)$ er en to gange kontinuert differentiabel funktion af t, og $f(x,t)$ er en to gange kontinuert differentiabel funktion af (x,t). Ved brug af kædereglen finder vi at

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2}$$

og

$$\begin{aligned}\frac{d^2g}{dt^2} &= \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Hvis vi definerer $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, så gælder at $\dfrac{dx}{dt}\,\Delta t = \Delta x + o(\Delta t)$. Dette indsættes i ligning (2) hvor vi ganger igennem med Δt, og vi får

$$\frac{dg}{dt}\,\Delta t = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\,\Delta t + o(\Delta t). \tag{4}$$

Udtrykket for $\dfrac{dx}{dt}\,\Delta t$ indsættes ligeledes i (3) hvor vi ganger igennem med $(\Delta t)^2$. Det giver

$$\frac{d^2g}{dt^2}\,(\Delta t)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\,\Delta x\Delta t + o(\Delta t). \tag{5}$$

[1] Vi benytter den sædvanlige »lille-o notation«: hvis h er en størrelse der går mod 0, så beteger $o(h)$ en størrelse der går hurtigere mod 0 end h, dvs. $o(h)/h$ går mod 0.

Indsætter vi (**??**) og (**??**) i (1), får vi

$$g(t+\Delta t)-g(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\Delta x\Delta t+o(\Delta t). \tag{6}$$

Vi vil anvende denne formel i en situation hvor $x(t)$ er udskiftet med en stokastisk proces $X(t)$ med den egenskab at for små Δt er $\mathrm{Var}(\Delta X(t))\approx\sigma^2\Delta t$, hvor σ^2 er en pæn funktion af t, dvs. $\Delta X(t)$ er af samme størrelsesorden som $(\Delta t)^{1/2}$. Derfor vil det fjerde led på højresiden af (**??**) være $o(\Delta t)$, så vi kan bruge den endnu simplere approksimation

$$g(t+\Delta t)-g(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2+o(\Delta t). \tag{7}$$

bpar Det antages at den stokastiske proces $X(t)$ har det stokastiske differentiale

$$dX(t)=a(t)\,dt+b(t)\,dB(t)$$

hvor $B(t)$ er en standard Brownsk bevægelse. Den stokastiske proces $Y(t)=g(X(t))=f(X(t),t)$ har da et stokastisk differentiale $dY(t)$ som vi finder ved at tage de tre første led på højresiden af (**??**) og i det første led erstatte Δx med (udtrykket for) $dX(t)$ og i det tredje led erstatte $(\Delta x)^2$ med $\mathrm{Var}(dB(t))=b(t)^2dt$; Δt erstattes med dt:

$$\begin{aligned}dY(t)&=\frac{\partial f}{\partial x}\Big(a(t)\,dt+b(t)\,dB(t)\Big)+\frac{\partial f}{\partial t}\,dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,b(t)^2\,dt\\&=\left(a(t)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}b(t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt+b(t)\frac{\partial f}{\partial x}\,dB(t).\end{aligned}$$

Dette er formel (6.9) i bogen.