Jørgen Larsen

15. oktober 2014

Noget om nulpunkter for Wienerprocessen

I dette notat vises et lille ekstra resulat om nulpunkterne for Wienerprocessen.

Lad $(W(t), t \geq 0)$ være en standard Wienerproces. For tidspunkter $t_0 < t_1$ skal $A(t_0, t_1)$ betegne den hændelse at $W(t) = 0$ for et eller andet t i det åbne interval fra t_0 til t_1. Øvelsen er nu at bestemme sandsynligheden $\mathrm{P}\big(A(t_0, t_1)\big)$ for denne hændelse for vilkårlige t_0 og t_1 med $0 \leq t_0 < t_1$.

Ved at dele op efter positionen til tid t_0 og dernæst (til andet lighedstegn) benytte at problemet er symmetrisk omkring $x = 0$, får vi

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(A(t_0, t_1)\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}\big(A(t_0, t_1) \,\big|\, W(t_0) = x\big) f_{W(t_0)}(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{P}\big(A(t_0, t_1) \,\big|\, W(t_0) = -x\big) f_{W(t_0)}(x)\,dx;\end{aligned} \tag{1}$$

her er $f_{W(t_0)}$ tæthedsfunktionen for $W(t_0)$, dvs. tæthedsfunktionen for normalfordelingen med middelværdi 0 og varians t. Den betingede sandsynlighed omskrives ved at forskyde problemet stykket $-t_0$ langs tidsaksen og udnytte Wienerprocessens tidshomogenitet:

$$\mathrm{P}\big(A(t_0, t_1) \,\big|\, W(t_0) = -x\big) = \mathrm{P}\big(A(0, t_1 - t_0) \,\big|\, W(0) = -x\big).$$

Den nye betingede sandsynlighed omskriver vi ved at forskyde problemet x i stedretningen (husk at x er et positivt tal); så bliver betingelsen $W(0) = -x$ til $W(0) = 0$, og hændelsen $A(0, t_1 - t_0)$ bliver til hændelsen $T_x < t_1 - t_0$, hvor T_x er tidspunktet for første passage af niveau x, jf. bogens afsnit 5.5. Fordelingen af T_x er en Lévyfordeling; tæthedsfunktionen f_{T_x} er givet i bogen på side 134, formel (5.9) (med $k = x$). Altså har vi

$$\mathrm{P}\big(A(t_0, t_1) \,\big|\, W(t_0) = -x\big) = \mathrm{P}\big(T_x < t_1 - t_0 \,\big|\, W(t_0) = 0\big) = \int_0^{t_1 - t_0} f_{T_x}(t)\,dt,$$

der indsættes i (1), og vi får

$$\mathrm{P}\Big(A(t_0,t_1)\Big) = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{t_1-t_0} f_{T_x}(t)\, f_{W(t_0)}(x)\,dt\,dx.$$

Herefter er det blot at indsætte udtrykkene for tæthedsfunktionerne og reducere og omskrive:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\Big(A(t_0,t_1)\Big) &= 2\int_0^{+\infty}\int_0^{t_1-t_0} \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2t}\Big)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t_0}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2t_0}\Big)\,dt\,dx \\
&= \int_0^{t_1-t_0} \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\,t^{-3/2}\int_0^{+\infty} x\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\,\frac{t+t_0}{t\,t_0}\Big)\,dx\,dt \\
&= \int_0^{t_1-t_0} \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\,t^{-3/2}\,\frac{t\,t_0}{t+t_0}\,dt \qquad \text{[brug substitutionen } t = t_0 s^2\text{]} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{t_1}{t_0}-1}} \frac{1}{1+s^2}\,ds \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{t_1}{t_0}-1}\right) \qquad \text{[fordi } \arctan(x) = \arccos(\tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})\text{]} \\
&= \frac{2}{\pi}\arccos\left(\sqrt{\frac{t_0}{t_1}}\right).
\end{aligned}$$

Dette er sandsynligheden for at Wienerprocessen har et nulpunkt mellem tid t_0 og tid t_1, når $0 \leq t_0 < t_1$. Hvis vi specielt vælger $t_0 = 0$, bliver sandsynligheden $\frac{2}{\pi}\arccos(0)$ som er lig 1. Der gælder således for ethvert $t > 0$, at med sandsynlighed 1 er $W(s) = 0$ for et eller andet s med $0 < s < t$.