Jørgen Larsen

14. oktober 2014

Noget om en symmetrisk random walks tilbagevenden til udgangspunktet

Dette notat giver et bevis for at en symmetrisk random walk på $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{Z}^2$ og med diskret tid med sandsynlighed 1 vender tilbage til sit udgangspunkt før eller senere (og derfor uendelig ofte), hvorimod dette ikke er tilfældet for en random walk i tre dimensioner.[1] Vi begynder med et lidt mere generelt resultat om begivenheder der indtræffer på stokastiske tidspunkter, sådan at ventetiderne er uafhængige og identisk fordelte; i de efterfølgende anvendelser vil »begivenhederne« være en random walks tilbagevenden til start.

1

Et vist fænomen $\mathcal{F}$ indtræffer til de heltallige tidspunkter $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ der antages at kunne skrives som

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_1 &= V_1, \\ T_2 &= V_1 + V_2, \\ T_3 &= V_1 + V_2 + V_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

hvor ventetiderne $V_1, V_2, V_3, \dots$ er uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med værdier i $\mathbb{N}$. Punktsandsynlighederne for V-ernes fordeling betegnes f_n:

$$f_n = \mathrm{P}(V = n), \; n = 1, 2, 3, \dots,$$

så f_n er sandsynligheden for at første forekomst af $\mathcal{F}$ efter tid 0 sker til tid n, og derfor er sandsynligheden for at $\mathcal{F}$ indtræffer før eller senere $\mathrm{P}(V < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

[1] Notation: $\mathbb{Z}$ er mængden af hele tal.

Vi indfører desuden betegnelsen u_n for sandsynligheden for at der til tid n er en forekomst af $\mathcal{F}$, altså sandsynligheden for at $T_j = n$ for et eller andet $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{P}\Big(\exists\, j \geq 0 : T_j = n\Big) \\ &= \mathrm{P}\Big(\exists\, j \in \{0,1,2,3,\dots,n\} : T_j = n\Big), \end{aligned}$$

hvor det sidste lighedstegn skyldes at der til hvert tidspunkt kan være 0 eller 1 forekomst, dvs. forekomsten til tid n kan højst være forekomst nummer n. Da $T_j = V_1 + V_2 + \cdots + V_j$, kan vi skrive[2]

$$u_n = \mathrm{P}\Big(\exists\, j \in \{0,1,2,3,\dots,n\} : V_1 + V_2 + \cdots + V_j = n\Big).$$

Vi skal vise

Sætning 1
$\mathcal{F}$ indtræffer med sandsynlighed 1, hvis og kun hvis $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Bevis
Ved at dele op efter tidspunktet for den første $\mathcal{F}$-forekomst efter tid 0 får vi for $n > 0$

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\Big(T_1 = k \text{ og } \exists\, j \in \{0,1,2,3,\dots,n\} : V_1 + V_2 + \cdots + V_j = n\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\Big(V_1 = k \text{ og } \exists\, j \in \{1,2,3,\dots,n-k\} : V_2 + V_3 + \cdots + V_j = n-k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\Big(V_1 = k\Big) \cdot \mathrm{P}\Big(\exists\, j \in \{1,2,3,\dots,n-k\} : V_2 + V_3 + \cdots + V_j = n-k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\Big(V_1 = k\Big) \cdot \mathrm{P}\Big(\exists\, j \in \{0,1,2,3,\dots,n-k\} : V_1 + V_2 + \cdots + V_j = n-k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k\, u_{n-k}. \end{aligned}$$

Vi indfører de to frembringende funktioner $F(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ og $U(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, der begge er defineret for $0 \leq z < 1$; F er desuden defineret i $z = 1$. Vi omskriver $U(z)$

[2] Når $j = 0$, er $V_1 + V_2 + \cdots + V_j$ en sum uden led, »den tomme sum«, som altid er lig 0 (fordi 0 er det neutrale element mht. addition). Derfor er betingelsen $V_1 + V_2 + \cdots + V_j = 0$ opfyldt for $j = 0$, så formlen udsiger at $u_0 = 1$.

ved hjælp af det netop fundne udtryk for u_n:

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} z^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} z^{n-k} \Big) f_k z^k \\ &= 1 + U(z) F(z), \end{aligned}$$

hvoraf fås at $F(z) = 1 - 1/U(z)$, så sandsynligheden for at $\mathcal{F}$ indtræffer før eller senere, er

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = F(1) = \lim_{z\uparrow 1} F(z) = 1 - \frac{1}{\lim\limits_{z\uparrow 1} U(z)},$$

og denne sandsynlighed er lig 1, hvis og kun hvis $\lim\limits_{z\uparrow 1} U(z) = +\infty$. Det er en simpel analyse-øvelse, som vi ikke vil gå nærmere i detaljer med, at vise at

$$\lim_{z\uparrow 1} U(z) = +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Hermed er sætningen vist. □

Sætning 2
Hvis $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, *indtræffer* $\mathcal{F}$ *med sandsynlighed* 1 *uendelig mange gange.*

Bevis
Det vides at summen af u_n-erne divergerer. Fra Sætning 1 ved vi da at $\mathcal{F}$ med sandsynlighed 1 indtræffer i hvert fald én gang. Antag at det vides at $\mathcal{F}$ med sandsynlighed 1 indtræffer mindst g gange, dvs. T_g er med sandsynlighed 1 et endeligt tal. Så er

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\big(\mathcal{F} \text{ indtræffer mindst } g+1 \text{ gange}\big) \\ &\quad = \sum_{k=g}^{\infty} \mathrm{P}\big(\mathcal{F} \text{ indtræffer mindst } g+1 \text{ gange} \,\big|\, T_g = k\big) \cdot \mathrm{P}(T_g = k) \\ &\quad = \sum_{k=g}^{\infty} \mathrm{P}\big(\mathcal{F} \text{ indtræffer efter tid } k \,\big|\, T_g = k\big) \cdot \mathrm{P}(T_g = k) \\ &\quad = \sum_{k=g}^{\infty} \mathrm{P}\big(V_{g+1} < \infty \,\big|\, T_g = k\big) \cdot \mathrm{P}(T_g = k). \end{aligned}$$

I de led hvor $\mathrm{P}(T_g = k) > 0$, er den betingede sandsynlighed lig med 1, fordi V_{g+1} og $T_g = V_1 + V_2 + \cdots + V_g$ er stokastisk uafhængige og dermed $\mathrm{P}\big(V_{g+1} < \infty \,\big|\, T_g = k\big) = \mathrm{P}(V_{g+1} < \infty) = \mathrm{P}(V < \infty)$ der vides at være lig 1. Vi har således at

$$\mathrm{P}\big(\mathcal{F} \text{ indtræffer mindst } g+1 \text{ gange}\big) = \sum_{k=g}^{\infty} \mathrm{P}(T_g = k) = \mathrm{P}(T_g < \infty)$$

der pr. antagelse er lig 1. Ved induktion har vi så at for ethvert g vil $\mathcal{F}$ med sandsynlighed 1 indtræffe mindst g gange. Sandsynligheden for at $\mathcal{F}$ kun indtræffer endeligt mange gange er da

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{g=1}^{\infty}\{\mathcal{F} \text{ indtræffer højst } g \text{ gange}\}\Big) \leq \sum_{g=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(\mathcal{F} \text{ indtræffer højst } g \text{ gange}\big) = 0$$

da alle leddene er lig 0. Hermed er sætningen vist. □

2

Vi skal nu anvende det foregående på symmetriske random walks $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$; »fænomenet« $\mathcal{F}$ er tilbagevenden til start (som er 0), så $u_n = \mathrm{P}(Y_n = 0)$, der er forskellig fra 0 netop når n er et lige tal.

SÆTNING 3
Lad $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ være en symmetrisk random walk på de hele tal $\mathbb{Z}$. Der gælder at med sandsynlighed 1 *vender processen uendelig ofte tilbage til sit udgangspunkt.*

BEVIS
Antag at $Y_0 = 0$. Vi ved at $\mathrm{P}(Y_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, og den størrelse vokser som $1/\sqrt{\pi n}$ når n vokser (det ses ved brug af Stirlings formel). Men da således $u_{2n} \approx 1/\sqrt{\pi n}$, er $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = +\infty$, så sætningen følger af Sætning 2. □

KOROLLAR 1
Lad $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ være en symmetrisk random walk på $\mathbb{Z}$. Der gælder at med sandsynlighed 1 *besøger processen ethvert punkt i tilstandsrummet $\mathbb{Z}$ uendelig ofte.*

BEVIS
For ethvert k gælder at processen med sandsynlighed 1 når til k før eller senere (det følger for eksempel af formlen for ruinsandsynligheden r_k (formel (3.14) i bogen) når $p = q$ og $N \to \infty$). Derefter vender den ifølge Sætning 3 med sandsynlighed 1 tilbage til k uendelig ofte. Da alle hændelserne $\{Y_n = k \text{ uendelig ofte}\}$ har sandsynlighed 1, har deres fællesmængde også sandsynlighed 1. □

SÆTNING 4
Lad $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ *være en symmetrisk random walk på de hele tal* $\mathbb{Z}$, *og lad* V *være ventetiden til første tilbagevenden til* 0, *dvs.* $V = \min\{n \in \mathbb{N} : Y_n = 0\}$. *Da gælder at middelværdien af* V *er* $+\infty$.

BEVIS
Med notationen fra beviset for Sætning 1 har vi at den frembringende funktion for V er $F(z)$, der fandtes at være lig $1 - 1/U(z)$. Da vi nu har et eksplicit udtryk for u_{2n} og dermed for $U(z)$, kan vi få et udtryk for $F(z)$, nemlig[3] $F(z) = 1 - \sqrt{1-z}$. Fra den generelle teori for sandsynlighedsfrembringende funktioner ved vi at $\mathrm{E}(V) = F'(1)$, hvor $F'(1)$ skal forstås som $\lim_{z\uparrow 1} F'(z)$. I det foreliggende tilfælde er $F'(z) = 1/(2\sqrt{1-z})$ der går mod $+\infty$ når $z \uparrow 1$. □

SÆTNING 5
Lad $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ *være en todimensional symmetrisk random walk på* $\mathbb{Z}^2$. *Der gælder at med sandsynlighed* 1 *vender processen uendelig ofte tilbage til sit udgangspunkt.*

BEVIS
Antag at $Y_0 = 0$. Vi ved[4] at $\mathrm{P}(Y_{2n} = 0) = \left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^2$ der vokser som $1/(\pi n)$ når n vokser (det ses ved brug af Stirlings formel). Men da således $u_{2n} \approx 1/(\pi n)$, er $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = +\infty$, så sætningen følger af Sætning 2. □

SÆTNING 6
Lad $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ *være en tredimensional symmetrisk random walk på* $\mathbb{Z}^3$. *Der gælder at med positiv sandsynlighed vender processen aldrig tilbage til sit udgangspunkt.*

BEVIS
Antag at $Y_0 = 0$. Der gælder[5] at

$$u_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n} \sum_{j,k\,:\,j+k\leq n} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}\right)^2$$

der vokser som $n^{-3/2}$, og da $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ derfor er konvergent, følger det ønskede af Sætning 1. □

---

[3] Se side 68 i bogen.
[4] Se afsnit 4.3.2 i bogen.
[5] Se side 361 i W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Third Edition. 1968.