Jørgen Larsen
29. september 2014

Vedr. Afsnit 3.12

1 Første tilbagevenden til start

Vi betragter en symmetrisk random walk $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ der starter i 0 (dvs. $Y_0 = 0$). Vi vil finde sandsynligheden f_{2n} for at første tilbagevenden til 0 sker efter præcis $2n$ skridt, dvs.

$$f_{2n} = \mathrm{P}(Y_1 \neq 0, Y_2 \neq 0, \dots, Y_{2n-1} \neq 0, Y_{2n} = 0).$$

(Dette problem er også genstand for behandling i bogens afsnit 3.12.)

Da der er tale om en symmetrisk random walk, har enhver sti af længde $2n$ sandsynlighed $(\frac{1}{2})^{2n}$, så vi mangler blot at bestemme antallet af stier med den ønskede egenskab: Hvis første skridt er $+1$, skal vi derefter have en sti der begynder i $+1$ og første gang rammer tidsaksen efter $2n-1$ skridt; antallet af sådanne stier er ifølge formel (4) på side 4 i nærværende notat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{\frac{1}{2}(2n-2)} &= \frac{1}{2n-1}\,\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}\\ &= \frac{1}{n}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}\\ &= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.\end{aligned}$$

Der er det samme antal stier som første gang vender tilbage til 0 efter i alt $2n$ skridt og hvor første skridt er -1, så ved at gange det netop fundne antal med 2 og med $(\frac{1}{2})^{2n}$ får vi den søgte sandsynlighed til

$$\begin{aligned}f_{2n} &= \frac{1}{2n}\binom{2n-2}{n-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n-2}\\ &= \frac{1}{2n}\,\mathrm{P}(Y_{2n-2} = 0).\end{aligned}$$

Man benytter undertiden betegnelsen u_{2m} for sandsynligheden for at en symmetrisk random walk efter $2m$ skridt er tilbage i sit udgangspunkt, dvs. $u_{2m} = \binom{2m}{m}(\frac{1}{2})^{2m}$. Med denne notation er $f_{2n} = \frac{1}{2n}\,u_{2n-2}$, jf. formel (3.34) i bogen.

2 Manglende tilbagevenden til start

Vi betragter en symmetrisk random walk $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ der starter i 0 (dvs. $Y_0 = 0$). Vi vil finde sandsynligheden for at den efter $2n$ skridt endnu ikke er vendt tilbage til 0, altså $\mathrm{P}(Y_1 \neq 0, Y_1 \neq 0, \ldots, Y_{2n} \neq 0)$. Da der er tale om en symmetrisk random walk, har enhver sti af længde $2n$ sandsynlighed $(\frac{1}{2})^{2n}$, så vi mangler blot at bestemme antallet af stier med den ønskede egenskab.

Lad k være et positivt heltal mindre end eller lig n. Antallet af stier der begynder i 0, efter $2n$ skridt er i $2k$, og som undervejs ikke rammer tidsaksen, er det samme som antallet af stier der begynder i $2k$ og som rammer tidsaksen for første gang efter $2n$ skridt [begrundelse: vend tidsaksens orientering], og det er ifølge formel (3) lig

$$\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}.$$

Ved at summere disse antal for $k = 1, 2, \ldots, n$, får vi antallet af stier der befinder sig over tidsaksen til og med skridt $2n$; summen bliver en »teleskopsum«, minus-delen i led nr. k går ud mod plus-delen i led nr. $k+1$, så resultatet bliver det første plus-led minus det sidste minus-led:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}\right) &= \binom{2n-1}{n+1-1} - \binom{2n-1}{n+n} \\ &= \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n} \\ &= \binom{2n-1}{n}.\end{aligned}$$

Der er det samme antal stier under tidsaksen, så det samlede antal stier der i løbet af $2n$ skridt ikke vender tilbage til udgangspunktet, er

$$2 \times \binom{2n-1}{n} = \frac{2\,(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Den søgte sandsynlighed er dermed

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y_1 \neq 0, Y_1 \neq 0, \ldots, Y_{2n} \neq 0) &= \binom{2n}{n}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n} \\ &= \mathrm{P}(Y_{2n} = 0).\end{aligned}$$

(Dette er formel (3.35) i bogen – når man retter trykfejlen dér.)

Nogle nyttige hjælperesultater

Det følgende handler om stier (sample paths) for random walks hvor tidsskridtene har længde 1 og hvor springene op og ned er enten +1 eller −1.

A1. Hvis man efter n tidsskridt er nået stykket k væk fra udgangspunktet, så har der nødvendigvis været $\frac{1}{2}(n+k)$ spring af størrelse +1 og $\frac{1}{2}(n-k)$ spring af størrelse −1.[1] NB: k regnes med fortegn, så $-n \leq k \leq n$.

$n \pm k$ er nødvendigvis et lige tal, så $\frac{1}{2}(n \pm k)$ er et helt tal.

A2. Antallet af stier der efter n skridt er endt stykket k fra udgangspunktet, er lig

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+k)}. \tag{1}$$

Det følger af A1.

A3. Spejlingsprincippet fortæller os[2] at antallet af stier der i løbet af n tidsskridt går fra $y_0 > 0$ til $y_1 > 0$ og som undervejs har krydset eller været på tidsaksen, er lig antallet af veje som på n skridt går fra y_0 til $-y_1$. Dette antal er ifølge A2

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+y_0+y_1)}. \tag{2}$$

A4. Antallet af stier der begynder i y_0 og efter n skridt rammer tidsaksen for første gang, er lig med

$$\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-y_0)} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)}$$

der også kan skrives som

$$\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)-1} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)}. \tag{3}$$

Bevis: Antallet afhænger ikke af y_0s fortegn, så lad os antage at $y_0 > 0$. Det søgte antal er lig med antallet af stier der begynder i y_0 og efter $n-1$ skridt befinder sig i $y_1 = 1$ og som ikke har rørt tidsaksen.[3] Dette antal er lig med $N_1 - N_2$, hvor N_1 er antal stier i alt af længde $n-1$ fra y_0 til 1, og N_2 er lig

[1] Fordi $\frac{1}{2}(n+k) - \frac{1}{2}(n-k) = k$.
[2] Man skal spejle den del af stien der kommer efter dens sidste besøg i 0, omkring tidsaksen.
[3] For skridt nr. n er der kun den ene mulighed −1.

antal stier af længde $n-1$ fra y_0 til 1 som undervejs berører tidsaksen; N_1 og N_2 kan derfor findes ved hhv. formel (1) og formel (2), så det søgte antal er[4]

$$\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)-1}-\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)}=\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-y_0)}-\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)}$$

som påstået.

Udtrykket (3) kan omskrives på følgende måde:

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)-1}-\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+y_0)}\\
&\qquad=\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1}{2}(n+y_0)-1\right)!\left(\frac{1}{2}(n-y_0)\right)!}-\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1}{2}(n+y_0)\right)!\left(\frac{1}{2}(n-y_0)-1\right)!}\\
&\qquad=\frac{n!\,(\frac{1}{2}(n+y_0))}{n\left(\frac{1}{2}(n+y_0)\right)!\left(\frac{1}{2}(n-y_0)\right)!}-\frac{n!\,(\frac{1}{2}(n-y_0))}{n\left(\frac{1}{2}(n+y_0)\right)!\left(\frac{1}{2}(n-y_0)\right)!}\\
&\qquad=\frac{n!}{\frac{1}{2}(n+y_0)\big)!\,\frac{1}{2}(n-y_0)\big)!}\left(\frac{\frac{1}{2}(n+y_0)}{n}-\frac{\frac{1}{2}(n-y_0)}{n}\right)\\
&\qquad=\frac{y_0}{n}\binom{n}{\frac{1}{2}(n+y_0)}.
\end{aligned}$$

Dette gælder for $y_0>0$. Hvis $y_0<0$, skal man i formlen erstatte y_0 med $-y_0$, så det generelle udtryk for antal stier der rammer tidsaksen for første gang efter n skridt bliver

$$\frac{|y_0|}{n}\binom{n}{\frac{1}{2}(n+y_0)}, \tag{4}$$

der svarer til det der står nederst på side 63 i bogen.

[4] Lighedstegnet følger ved anvendelse af formlen $\binom{m}{x}=\binom{m}{m-x}$.