Symmetribevarende udfoldning

```
> restart;
> with(algcurves):
> with(linalg):
```

Strømlinjefunktionen

Følgende strømlinjefunktion ønskes transformeret
Bemærk at vi arbejder på en trunkeret version, og manuelt holder styr på restledet

```
> psi_eq:=y^2*x*(epsilon[1,2]+psi[1,3]*y+psi[3,2]*x^2+psi[1,4]*
  y^2);
```

$$psi\_eq := y^2\,x\,(\varepsilon_{1,2} + \psi_{1,3}\,y + \psi_{3,2}\,x^2 + \psi_{1,4}\,y^2)$$

Den kanoniske transformation

En passende genererende funktion opstilles

```
> S:=xi*y+sum(sum(s[i,j,3-i-j]*xi^i*y^j*epsilon[1,2]^(3-i-j),j=
  0..3-i),i=0..3);
```

$$S := \xi\,y + s_{0,0,3}\,{\varepsilon_{1,2}}^3 + s_{0,1,2}\,y\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + s_{0,2,1}\,y^2\,\varepsilon_{1,2} + s_{0,3,0}\,y^3 + s_{1,0,2}\,\xi\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + s_{1,1,1}\,\xi\,y\,\varepsilon_{1,2} + s_{1,2,0}\,\xi\,y^2 + s_{2,0,1}\,\xi^2\,\varepsilon_{1,2} + s_{2,1,0}\,\xi^2\,y + s_{3,0,0}\,\xi^3$$

Ud fra den genererende funktion findes udtryk for eta og x som funktion af *y* og xi

```
> kanon1:=x=diff(S,y);
```

kanon1 :=

$$x = \xi + s_{0,1,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + 2\,s_{0,2,1}\,y\,\varepsilon_{1,2} + 3\,s_{0,3,0}\,y^2 + s_{1,1,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{1,2,0}\,\xi\,y + s_{2,1,0}\,\xi^2$$

```
> kanon2:=eta=diff(S,xi);
```

kanon2 :=

$$\eta = y + s_{1,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + s_{1,1,1}\,y\,\varepsilon_{1,2} + s_{1,2,0}\,y^2 + 2\,s_{2,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,y + 3\,s_{3,0,0}\,\xi^2$$

y opskrives som en generel række i xi og eta til anden orden

```
y_raekke:= y=b[1,0,0]*xi+b[0,1,0]*eta+
b[0,0,1]*epsilon[1,2]+sum(sum(b[i,j,2-i-j]*xi^(i)*eta^(j)*epsil
on[1,2]^(2-i-j),i=0..2-j),j=0..2);
```

$$y\_raekke := y = b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2$$

Denne generelle række indsættes i ligningen for eta

```
> eq1:=subs(y_raekke,kanon2);
```

$$eq1 := \eta = b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2 + s_{1,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + s_{1,1,1}\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2)\,\varepsilon_{1,2} + s_{1,2,0}\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2)^2 + 2\,s_{2,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,{\varepsilon_{1,2}}^2 + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2) + 3\,s_{3,0,0}\,\xi^2$$

Der omskrives til en række for 0, ved at trække højresiden fra venstresiden

```
> pol:=op(1,eq1)-op(2,eq1);
```

$$pol := \eta - b_{1,0,0}\,\xi - b_{0,1,0}\,\eta - b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} - b_{0,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} - b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} - b_{2,0,0}\,\xi^2 - b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - b_{1,1,0}\,\xi\,\eta - b_{0,2,0}\,\eta^2 - s_{1,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} - s_{1,1,1}\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2)\,\varepsilon_{1,2} - s_{1,2,0}\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2)^2 - 2\,s_{2,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,(b_{1,0,0}\,\xi + b_{0,1,0}\,\eta + b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} + b_{0,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} + b_{1,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + b_{2,0,0}\,\xi^2 + b_{0,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + b_{1,1,0}\,\xi\,\eta + b_{0,2,0}\,\eta^2) - 3\,s_{3,0,0}\,\xi^2$$

Der sorteres så rækken eksplicit er i eta, xi og epsilon. Alle koefficienterne skal nu være nul

```
> pol2:=mtaylor(pol,[xi,eta,epsilon[1,2]],3);
```

$$pol2 := (1 - b_{0,1,0})\,\eta - b_{0,0,1}\,\varepsilon_{1,2} - b_{1,0,0}\,\xi + (-2\,s_{2,1,0}\,b_{1,0,0} - s_{1,2,0}\,b_{1,0,0}^{2} - 3\,s_{3,0,0} - b_{2,0,0})\,\xi^2 + (-b_{1,1,0} - 2\,s_{2,1,0}\,b_{0,1,0} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,1,0}\,b_{1,0,0})\,\eta\,\xi + (-2\,s_{2,1,0}\,b_{0,0,1} - b_{1,0,1} - 2\,s_{2,0,1} - s_{1,1,1}\,b_{1,0,0} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}\,b_{1,0,0})\,\varepsilon_{1,2}\,\xi + (-b_{0,2,0} - s_{1,2,0}\,b_{0,1,0}^{2})\,\eta^2 + (-s_{1,1,1}\,b_{0,1,0} - b_{0,1,1} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}\,b_{0,1,0})\,\varepsilon_{1,2}\,\eta + (-b_{0,0,2} - s_{1,0,2} - s_{1,1,1}\,b_{0,0,1} - s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}^{2})\,\varepsilon_{1,2}^{2}$$

Koefficienterne trækkes ud i et sæt af ligninger (bemærk at lighedstegn og nul er underforstået)

```
> eq2:={coeffs(pol2,[eta,xi,epsilon[1,2]])};
```

$$eq2 := \{-b_{0,0,1},\ -2\,s_{2,1,0}\,b_{1,0,0} - s_{1,2,0}\,b_{1,0,0}^{2} - 3\,s_{3,0,0} - b_{2,0,0},\ -b_{0,0,2} - s_{1,0,2} - s_{1,1,1}\,b_{0,0,1} - s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}^{2},\ -b_{1,0,0},\ -b_{1,1,0} - 2\,s_{2,1,0}\,b_{0,1,0} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,1,0}\,b_{1,0,0},\ -2\,s_{2,1,0}\,b_{0,0,1} - b_{1,0,1} - 2\,s_{2,0,1} - s_{1,1,1}\,b_{1,0,0} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}\,b_{1,0,0},\ 1 - b_{0,1,0},\ -b_{0,2,0} - s_{1,2,0}\,b_{0,1,0}^{2},\ -s_{1,1,1}\,b_{0,1,0} - b_{0,1,1} - 2\,s_{1,2,0}\,b_{0,0,1}\,b_{0,1,0}\}$$

Disse skal løses i følgende ubekendte

```
> vars:={b[1,0,0],b[0,1,0],b[0,0,1],seq(seq(b[i,j,2-i-j],j=0..2
  -i),i=0..2)};
```

$$vars := \{b_{0,0,2},\ b_{1,0,1},\ b_{2,0,0},\ b_{0,1,1},\ b_{1,1,0},\ b_{0,2,0},\ b_{0,1,0},\ b_{0,0,1},\ b_{1,0,0}\}$$

Ligningssystemet løses

```
> res:=solve(eq2,vars);
```

$$res := \{b_{0,1,0} = 1,\ b_{0,2,0} = -s_{1,2,0},\ b_{0,1,1} = -s_{1,1,1},\ b_{1,1,0} = -2\,s_{2,1,0},\ b_{0,0,1} = 0,\ b_{1,0,0} = 0,\ b_{1,0,1} = -2\,s_{2,0,1},\ b_{2,0,0} = -3\,s_{3,0,0},\ b_{0,0,2} = -s_{1,0,2}\}$$

Ligningen for y som funktion af xi, eta og epsilon kan nu opskrives

```
> yeq:=subs(res,y_raekke);
```

$$yeq := y = \eta - s_{1,0,2}\,\varepsilon_{1,2}^{2} - 2\,s_{2,0,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} - 3\,s_{3,0,0}\,\xi^2 - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2$$

Da vi ønsker at y=0 skal sendes i eta=0 vælges og indsættes følgende

```
> yeq:=subs(s[1,0,2]=0,s[2,0,1]=0,s[3,0,0]=0,yeq);
```

$$yeq := y = \eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2$$

Ligningen for y kan nu indsættes i ligningen for x

```
> subst3:=subs(yeq,kanon1);
```

$$subst3 := x = \xi + s_{0,1,2}\,\varepsilon_{1,2}^{\,2} + 2\,s_{0,2,1}\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2)\,\varepsilon_{1,2} + 3\,s_{0,3,0}\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2)^2 + s_{1,1,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{1,2,0}\,\xi\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2) + s_{2,1,0}\,\xi^2$$

Højresiden tages ud (for at man kan benytte mtaylor funktionen)

```
> subst4:=op(2,subst3);
```

$$subst4 := \xi + s_{0,1,2}\,\varepsilon_{1,2}^{\,2} + 2\,s_{0,2,1}\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2)\,\varepsilon_{1,2} + 3\,s_{0,3,0}\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2)^2 + s_{1,1,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{1,2,0}\,\xi\,(\eta - s_{1,1,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} - 2\,s_{2,1,0}\,\xi\,\eta - s_{1,2,0}\,\eta^2) + s_{2,1,0}\,\xi^2$$

Da vi kun regner til anden orden i xi, eta og epsilon skæres der af ved at Taylorrækkeudvikle ti anden orden.

```
> xeq:=x=mtaylor(subst4,[xi,eta,epsilon[1,2]],3);
```

$$xeq := x = \xi + s_{0,1,2}\,\varepsilon_{1,2}^{\,2} + 2\,s_{0,2,1}\,\eta\,\varepsilon_{1,2} + 2\,s_{1,2,0}\,\xi\,\eta + 3\,s_{0,3,0}\,\eta^2 + s_{2,1,0}\,\xi^2 + s_{1,1,1}\,\xi\,\varepsilon_{1,2}$$

Normalformen

De generelle udtryk for x og y fra den kanoniske transformation indsættes i strømlinjefunktionen, og der skæres af ved femte ordens led

```
> psi_eq2:=subs(yeq,xeq,psi_eq):
> psi_eq2:=mtaylor(psi_eq2,[xi,eta,epsilon[1,2]],6);
```

$$psi\_eq2 := \psi_{1,3}\,\xi\,\eta^3 + \varepsilon_{1,2}\,\eta^2\,\xi + \eta^2\,\psi_{3,2}\,\xi^3 - 5\,\psi_{1,3}\,s_{2,1,0}\,\xi^2\,\eta^3 - 3\,s_{2,1,0}\,\varepsilon_{1,2}\,\xi^2\,\eta^2 + (-\psi_{1,3}\,s_{1,2,0} + \psi_{1,4})\,\xi\,\eta^4 - 2\,\psi_{1,3}\,s_{1,1,1}\,\varepsilon_{1,2}\,\xi\,\eta^3 - s_{1,1,1}\,\varepsilon_{1,2}^{\,2}\,\eta^2\,\xi + 3\,s_{0,3,0}\,\psi_{1,3}\,\eta^5 + (2\,s_{0,2,1}\,\psi_{1,3} + 3\,s_{0,3,0})\,\varepsilon_{1,2}\,\eta^4 + (s_{0,1,2}\,\psi_{1,3} + 2\,s_{0,2,1})\,\varepsilon_{1,2}^{\,2}\,\eta^3 + s_{0,1,2}\,\varepsilon_{1,2}^{\,3}\,\eta^2$$

de s-er som optræder alene som koefficienter sættes til 0

```
> psi_eq3:=subs(s[2,1,0]=0,s[1,1,1]=0,s[0,3,0]=0,s[0,2,1]=0,s[0
  ,1,2]=0,psi_eq2);
```

$$psi\_eq3 := \psi_{1,3}\,\xi\,\eta^3 + \varepsilon_{1,2}\,\eta^2\,\xi + \eta^2\,\psi_{3,2}\,\xi^3 + (-\psi_{1,3}\,s_{1,2,0} + \psi_{1,4})\,\xi\,\eta^4$$

Et led kan fjernes ved at benytte $s_{1,2,0}$

```
> psi_eq4:=subs(s[1,2,0]=psi[1,4]/psi[1,3],psi_eq3);
```

$$psi\_eq4 := \psi_{1,3}\,\xi\,\eta^3 + \varepsilon_{1,2}\,\eta^2\,\xi + \eta^2\,\psi_{3,2}\,\xi^3$$

Denne strømlinjefunktion kan forsimples ved at skalere tiden med psi_3,2 (da vi har forudsat at denne er forskellig fra nul). Dette svarer i praksis til at dividere højresiden med psi_3,2

```
> psi_normal:=expand(psi_eq4/psi[3,2]);
```

$$psi\_normal := \frac{\psi_{1,3}\,\xi\,\eta^3}{\psi_{3,2}} + \frac{\varepsilon_{1,2}\,\eta^2\,\xi}{\psi_{3,2}} + \eta^2\,\xi^3$$

For at lette notationen omskrives normalformen til

```
> psi_normal := c[1,2]*eta^2*xi+psi[1,3]*xi*eta^3+eta^2*xi^3;
>
```

$$psi\_normal := \psi_{1,3}\,\xi\,\eta^3 + c_{1,2}\,\eta^2\,\xi + \eta^2\,\xi^3$$

Hvor psi_1,3 er en ny koefficient. I kapitel 6 er der argumenteret for at vi kun ser på psi_1,3 > 0 .

Udfoldning

Det dynamiske system findes, og tiden skaleres med eta

```
> xiprik:=diff(psi_normal,eta);
```

$$xiprik := 3\,\psi_{1,3}\,\xi\,\eta^2 + 2\,c_{1,2}\,\eta\,\xi + 2\,\eta\,\xi^3$$

```
> xiprik:=sort(expand(xiprik/eta),[xi,eta]);
```

$$xiprik := 2\,\xi^3 + 3\,\psi_{1,3}\,\xi\,\eta + 2\,c_{1,2}\,\xi$$

```
> etaprik:=-diff(psi_normal,xi):
> etaprik:=sort(expand(etaprik/eta),[xi,eta]);
```

$$etaprik := -3\,\xi^2\,\eta - \psi_{1,3}\,\eta^2 - c_{1,2}\,\eta$$

Jacobimatricen findes

```
> jacobi:=matrix([[diff(xiprik,xi),
  diff(xiprik,eta)],[diff(etaprik,xi),diff(etaprik,eta)]]);
```

$$jacobi := \begin{bmatrix} 6\,\xi^2 + 3\,\psi_{1,3}\,\eta + 2\,c_{1,2} & 3\,\psi_{1,3}\,\xi \\ -6\,\xi\,\eta & -3\,\xi^2 - 2\,\psi_{1,3}\,\eta - c_{1,2} \end{bmatrix}$$

Jacobideterminanten defineres

```
> jacdet:=sort(det(jacobi),[xi,eta]);
```

$$jacdet := -18\,\xi^4 - 3\,\psi_{1,3}\,\xi^2\,\eta - 12\,c_{1,2}\,\xi^2 - 6\,{\psi_{1,3}}^2\,\eta^2 - 7\,\psi_{1,3}\,c_{1,2}\,\eta - 2\,{c_{1,2}}^2$$

Positionen af kritiske punkter ved væg (dvs eta=0) findes ved at løse

```
> krit_eq_vaeg:=(subs(eta=0,xiprik)/2);
```

$$krit\_eq\_vaeg := \xi^3 + c_{1,2}\,\xi$$

```
> krit_pos_vaeg:=[solve(krit_eq_v,xi)];
```

$$krit\_pos\_vaeg := [0, \sqrt{-c_{1,2}}, -\sqrt{-c_{1,2}}]$$

Det testes nu, hvornår disse kritiske punkter er degenererede

```
> subs(xi=krit_pos_vaeg[1],eta=0,jacdet);
```

$$-2\,{c_{1,2}}^2$$

```
> subs(xi=krit_pos_vaeg[2],eta=0,jacdet);
```

$$-8\,{c_{1,2}}^2$$

```
> subs(xi=krit_pos_vaeg[3],eta=0,jacdet);
```

$$-8\,{c_{1,2}}^2$$

Det ses, at de kritiske punkter på væggen kun er degenererede når c_1,2=0

```
>
```

Positionen af de kritiske punkter i væsken (eta forskellig fra nul) findes

```
> krit_pos_vaeske:=solve({xiprik,etaprik/eta},{xi,eta});
```

$$krit\_pos\_vaeske := \{\xi = 0, \eta = -\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}}\}, \{\xi = \mathrm{RootOf}(7\,\_Z^2 + c_{1,2}), \eta = -\frac{4}{7}\,\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}}\}$$

Og skrives manuelt op på en lettere håndterlig måde.

```
> krit_pos_vaeske:=[{xi = 0, eta =
  -c[1,2]/psi[1,3]},allvalues({xi = RootOf(7*_Z^2+c[1,2]), eta
  = -4/7*c[1,2]/psi[1,3]})];
```

krit_pos_vaeske :=

$$\left[\{\xi=0,\eta=-\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}}\},\{\eta=-\frac{4}{7}\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}},\xi=\sqrt{-\frac{1}{7}c_{1,2}}\},\{\eta=-\frac{4}{7}\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}},\xi=-\sqrt{-\frac{1}{7}c_{1,2}}\}\right]$$

Det testes nu hvornår disse kritiske punkter er degenererede (og samtidig bestemmes deres type

```
> subs(krit_pos_vaeske[1],jacdet);
```

$$-c_{1,2}^{\;2}$$

```
> subs(krit_pos_vaeske[2],jacdet);
```

$$\frac{8}{7}c_{1,2}^{\;2}$$

```
> subs(krit_pos_vaeske[3],jacdet);
```

$$\frac{8}{7}c_{1,2}^{\;2}$$

Det ses at de kritiske punkter på væggen kun er degenererede når c_1,2=0

```
>
```

Det er nu vist, at der er to forskellige strukturelt stabile strømninger, og en strukturelt ustabil.
Vi kan derfor nu tegne seperatricer for disse strømninger ved at vælge konkrete c_1,2 værdier
Det ses også at psi_1,3 ikke har nogen betydning for, hvornår der er degenererede punkter.

$c_{1,2} < 0$,

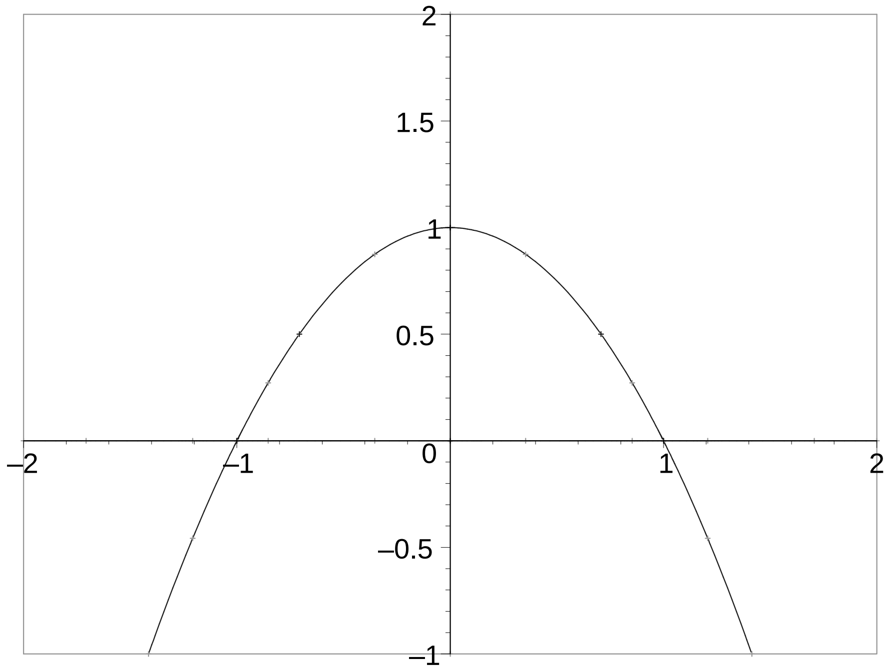
Først undersøges c_1,2=-1 og psi_1,3=1

Med følgende funktion plottes seperatricer for de kritiske punkter på væggen.
Dette gøres ved at tegne kurver hvor strømlinjefunktionen antager værdien 0.
For at plotterutinen kan fungere bedre divideres strømlinjefunktionen med eta,
hvilket svarer til at fjerne den ækvikurve som ligger i eta=0

```
> psi_konk:=simplify(subs(c[1,2]=-1,psi[1,3]=1,psi_normal/et
  a));
```

$$psi\_konk := \eta\,\xi\,(\eta-1+\xi^2)$$

```
> plot_real_curve(psi_konk,xi,eta,view=[-2...2,-1..2]);
```



Bemærk at seperatricen i xi = 0 mangler.
Dette skyldes, at den anvendte plotterutine ikke er god til lodrette linier.

Det analyseres hvor de kritiske punkter er

```
> subs(c[1,2]=-1,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeske);
```

$$\left[\{\xi=0, \eta=1\}, \{\eta=\frac{4}{7}, \xi=\frac{1}{7}\sqrt{7}\}, \{\eta=\frac{4}{7}, \xi=-\frac{1}{7}\sqrt{7}\}\right]$$

```
> subs(c[1,2]=-1,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeg);
```

$$[0, 1, -1]$$

Det ses, at to af de kritiske punkter (dem der er centre) ligger inden for seperatricerne, og at sadlen i væsken ser ud til at ligge på seperatricen fra væggen. At dette faktisk er tilfældet ses ved at betragte den konkrete strømlinjefunktion.

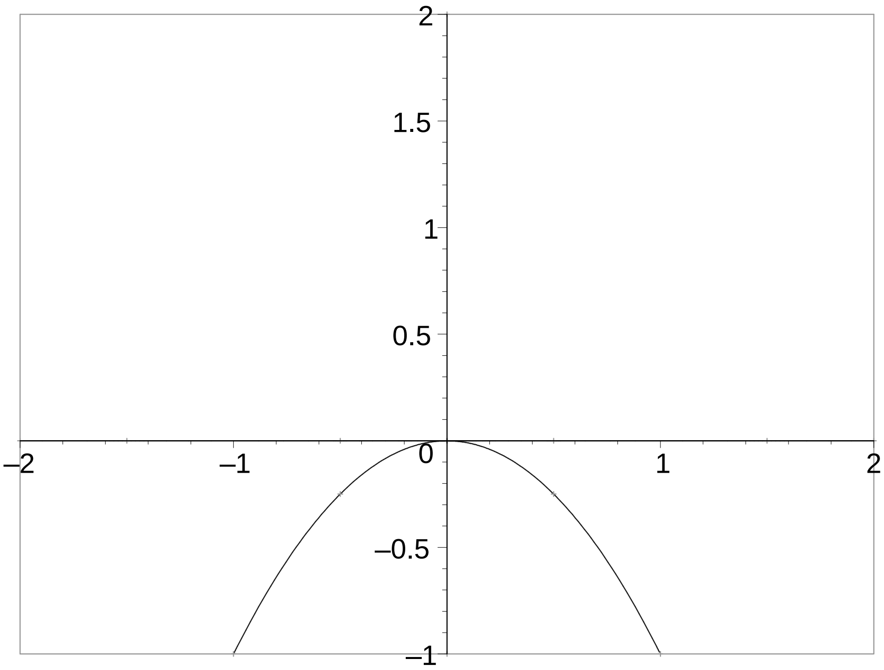
$c_{1,2}=0$

Nu undersøges c_1,2=0 og psi_1,3=1

```
> psi_konk:=simplify(subs(c[1,2]=0,psi[1,3]=1,psi_normal/eta
  ));
```

$$psi\_konk := \eta\,\xi\,(\eta+\xi^2)$$

```
> plot_real_curve(psi_konk,xi,eta,view=[-2...2,-1..2]);
```



Bemærk at seperatricen i xi=0 igen mangler.

Det analyseres hvor de kritiske punkter ligger

```
> subs(c[1,2]=0,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeske);
```

$$[\{\xi=0, \eta=0\}, \{\xi=0, \eta=0\}, \{\xi=0, \eta=0\}]$$

```
> subs(c[1,2]=0,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeg);
```

$$[0, 0, 0]$$

Det ses at alle de potentielle kritiske punkter falder sammen med det degenererede kritiske punkt på væggen.

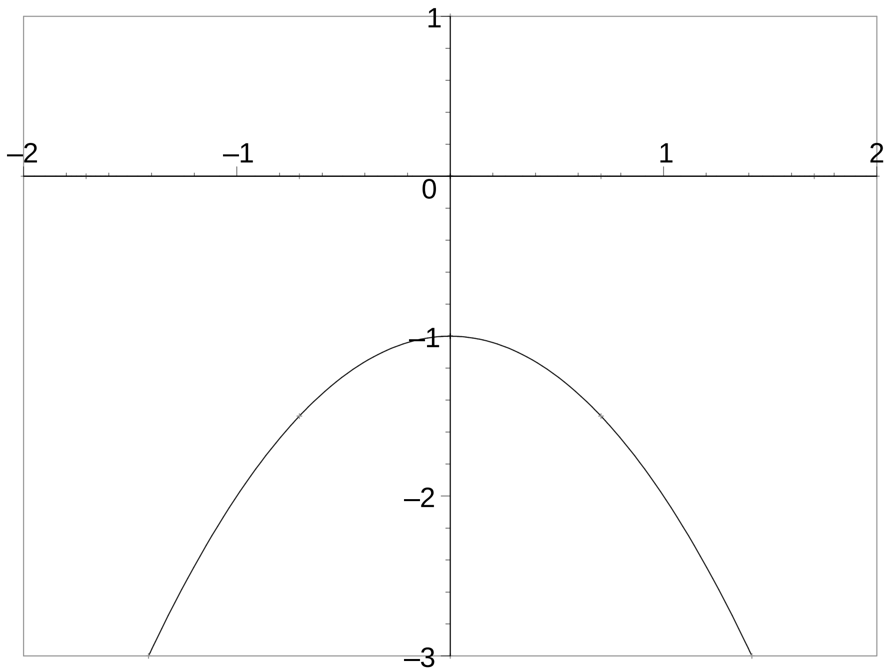
$0 < c_{1,2}$

Til sidst undersøges c_1,2=1 og psi_1,3=1

```
> psi_konk:=simplify(subs(c[1,2]=1,psi[1,3]=1,psi_normal/eta
  ));
```

$$psi\_konk := \eta\, \xi\, (\eta + 1 + \xi^2)$$

```
> plot_real_curve(psi_konk,xi,eta,view=[-2...2,-3..1]);
```



Bemærk at seperatricen i xi=0 igen mangler

Det analyseres hvor de kritiske punkter ligger

```
> subs(c[1,2]=1,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeske);
```

$$\left[\{\eta=-1, \xi=0\}, \{\eta=\frac{-4}{7}, \xi=\frac{1}{7} I\sqrt{7}\}, \{\eta=\frac{-4}{7}, \xi=\frac{-1}{7} I\sqrt{7}\}\right]$$

```
> subs(c[1,2]=1,psi[1,3]=1,krit_pos_vaeg);
```

$$[0, I, -I]$$

Det ses her at der kun er et kritisk punkt i væsken, og et på væggen,
da de resterende positioner er komplekse.

På baggrund af denne analyse kan det endimensionelle bifurkationsdiagram tegnes.