TEKST NR 388 2000

Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel

–

et 2. moduls matematik modelprojekt

Bo Jakobsen og Kristine Niss.

Vejleder: Jesper Larsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde

Bo Jakobsen og Kristine Niss. Vejleder: Jesper Larsen : Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel. – et 2. moduls matematik modelprojekt.

IMFUFA tekst nr. 388/2000 125 sider ISSN 0106-6242

Det undersøges om det i Peskins 2D-hjertemodel giver en mere fysisk og matematisk konsistent modellering at anvende en af Peskin udledt modificeret version af Navier-Stokes ligning frem for den originalt anvendte. Ved at opstille et sæt af forudsætninger, der giver en teoretisk ramme til forståelse af den originale version af modellen, vises det, at denne *er* matematisk og fysisk konsistent. Det vises desuden, at forskellen mellem de to versioner af Navier-Stokes ligning kun har betydning i de områder, hvor der løber væske ind i modellen.

Endvidere implementeres den modificerede Navier-Stokes ligning i Peskins 2D-hjertemodel, og det analyseres på baggrund af data fra modellen, hvorvidt modifikationen har en positiv effekt på modellens praktiske problemer. Hermed menes konkret om modifikationen medfører en forbedring af modellens numeriske stabilitet, eller om den har en hæmmende effekt på hjerterandens bevægelse i beregningsdomænet. På baggrund af modellens data ses der ingen tegn på, at modifikationen afhjælper de praktiske problemer.

An English summary is included as appendix F.

Forord

Denne IMFUFA-tekst er i det store hele et genoptryk af en 2. moduls modelprojektrapport udarbejdet i forårssemesteret 2000. Vi har dog tilføjet nogle enkelte forklaringer og resultater samt rettet et par trykfejl. Endvidere har vi udarbejdet et engelsk resumé på artikelform, som findes i bilag F.

Vi vil gerne takke vores vejleder Jesper Larsen (Math-Tech, IMFUFA) for idéen til projektet, samt for hans hjælp og opbakning undervejs. Desuden ønsker vi at takke følgende personer for deres hjælp i forbindelse med projektarbejdet: Pernille Thorup Adeler (Math-Tech), Jacob M. Jacobsen (IMFUFA), Viggo Andreasen (IMFUFA), samt Marianne Niss, Stine Timmermann og Ulrik Stervbo-Kristensen.

God fornøjelse med læsningen.

Bo og Kristine
17. november 2000 IMFUFA, RUC

Hyppigt benyttede symboler

Rum og tid

Ω	beregningsdomænet
H	bredden af beregningsdomænet
h	gitterbredden
N_h	antallet af gitterpunkter i en retning
$\mathbf{x}$	positionsvektor
x_i	i-te komposant af position
T	hjerteslagstid
t	tid
Δt	længden af et tidsskridt

Beskrivelse af randen

s	parametriseringsvariabel til randen
L	længde af parameterinterval til randen
$\mathbf{X}(s,t)$	position af randpunkt
$\mathbf{f}$	kraftdensitet på randen regnet pr. s

Underforstået tids- og positionsafhængighed

p	tryk; i 2D er dimensionen kraft pr. længde
ψ	divergensen af hastigheden, eller strømningshastighedsfordelingen
$\mathbf{u}$	hastighed
$\mathbf{F}$	kraftdensitet; i 2D er dimensionen kraft pr. areal
u_i	i-te komposant af hastighed
F_i	i-te komposant af kraftdensitet

Explicit tidsafhængig, underforstået positionsafhængighed

$\mathbf{u}^n$	hastighed til n'te tidsskridt
$\mathbf{F}^n$	kraftdensiteten til n'te tidsskridt

Underforstået tidsafhængighed

K	samlet kinetisk energi af systemet
Q_k	strømningshastighed ved den k-te kilde/dræn

Fordelingsfunktioner

w_{int}	fordelingsfunktion for de interne kilder
w_{ex}	fordelingsfunktion for den externe kilde
δ	kontinuert 2D Dirac deltafunktion
δ_h	diskret 2D deltafunktion

Konstanter

ρ	densitet, i 2D masse pr. areal
μ	viskositet, i 2D masse pr. tid

Iøvrigt

$\mathbf{n}$	normal vektor
$\int_A dA$	overflade integral
$\int_l dl$	rand integral

Indhold

1 Indledning

Udgangspunktet for dette projekt var, at vi blev præsenteret for et problem med Peskins 2D-hjertemodel, som ikke tidligere var blevet behandlet. For at kunne forstå dette problem, er det naturligvis nødvendigt at have et minimum af kendskab til modellen. Derfor giver vi en ultrakort præsentation af modellen i denne indledning. Det sker udelukkende med henblik på at præsentere problemet, og vi giver en mere fyldestgørende præsentation af modellen i kapitel 2. Selve problemet foldes også yderligere ud senere, først og fremmest i afsnit 2.1.2 og 3.1.

Modellen og problemet

Peskins 2D-hjertemodel er en model, der modellerer blodets bevægelse gennem venstre hjertehalvdel. Modellens matematiske grundlag er et sæt af partielle differentialligninger. Da disse ikke kan løses analytisk, er de diskretiserede, og en løsningsmetode til disse diskrete ligninger er implementeret i et computerprogram. Den hydrodynamiske modelleringen sker med udgangspunkt i den grundlæggende forudsætning, at blodet kan antages at være en inkompressibel Newtonsk væske[1].

I hydrodynamik er det generelt sådan, at det styrende differentialligningssystem består af to ligninger; en kontinuitetsligning, der beskriver masseregnskabet i systemet og en bevægelsesligning, der beskriver impulsregnskabet. For Newtonske væsker kaldes bevægelsesligningen almindeligvis Navier-Stokes ligning. Bevægelsesligningen i Peskins 2D-hjertemodel er altså en form for Navier-Stokes ligning.

I modellen er der tre områder, hvor der "strømmer" væske ind og ud af systemet. Der er altså indbygget kilder og dræn i modellen. Disse kilder og dræn har naturligvis betydning for masseregnskabet og dermed for kontinuitetsligningen. Den væske, der strømmer ind og ud af systemet ved kilder og dræn har endvidere betydning for impulsregnskabet. Det vil altså sige, at væskestrømmen har betydning for formen af Navier-Stokes ligning.

Problemet med Peskins 2D-hjertemodel var, at der i opstillingen af ligningssystemet ikke blev taget stilling til, hvilken betydning kilder og dræn har for impulsregnskabet. Dermed var det *ikke* blevet overvejet hvilken form Navier-Stokes ligning bør have. I stedet anvendtes der blot en standard Navier-Stokes

[1] I en Newtonsk væske antages det, at spændingstensoren kun afhænger lineært af hastighedsfeltets førsteordens afledte.

ligning for inkompressible væsker. Igennem rapporten omtaler vi denne form af Navier-Stokes ligning som den originale Navier-Stokes ligning, hvor "originale" henviser til, at det er den for modellen originale formulering.

Omkring 1998, godt 20 år efter indførslen af kilder og dræn i modellen [2] blev Peskin opmærksom på, at valget af Navier-Stokes ligning ikke var trivielt. Det fremgår af, at han udarbejdede den upublicerede note "Inkompressible fluid dynamics with distributed sources and sinks" [Peskin, 1998], hvor han giver en generel beskrivelse af, hvordan der kan tages højde for kilder og dræns betydning i impulsregnskabet. I dette notat når Peskin frem til en modificeret version af Navier-Stokes ligning for inkompressible væsker. Denne ligning omtales fremover i rapporten som den modificerede Navier-Stokes ligning. I forlængelse af udledningen af den modificerede Navier-Stokes ligning viser Peskin, at kilder og dræn i den pågældende formulering giver anledning til, at der dels dissiperes kinetisk energi til varme, og dels "strømmer" kinetisk energi ud af systemet.

Udover det beskrevne problem med de grundlæggende forudsætninger, er der nogle praktiske problemer i forbindelse med modellens resultater. For det første kan man kun få numerisk stabilitet i systemet, hvis man opskalerer viskositeten betydeligt. For det andet bevæger hjertet sig umiddelbart for meget rundt i beregningsdomænet.

Disse praktiske problemer kan begge tolkes som en indikation af at der er for meget kinetisk [3] energi i systemet [4]. Dette har lagt grundlaget for en hypotese om, at de praktiske problemer hænger sammen med forudsætningsproblemet, eller mere konkret med, at der i modellen ikke tages højde for impulsen på den rette måde.

På baggrund af alt det ovenstående har vi arbejdet ud fra følgende problemformulering

> Er der teoretisk og/eller praktisk grundlag for, at den modificerede Navier-Stokes ligning bør anvendes frem for den originale Navier-Stokes ligning i Peskins 2D-hjertemodel?

Teoretisk skal her forstås, som vil det give en mere fysisk og/eller matematisk konsistent modellering at vælge den modificerede Navier-Stokes ligning?

Praktisk skal forstås som, vil anvendelsen af den modificerede Navier-Stokes ligning kunne løse eller afhjælpe de beskrevne praktiske problemer?

[2] Første gang Peskin publisere noget om modellen, hvor kilder og dræn indgår er i Peskin [1977].

[3] Da væsken er inkompressibel er der en entydig sammenhæng mellem den kinetiske energi og impulsen.

[4] I afsnit 2.1.2 går vi nærmere ind i en diskussion af, hvordan de praktiske problemer er koblede til mængden af kinetisk energi i systemet.

Metode

De to dele i problemformuleringen danner et naturligt grundlag for en todelt metode. Således analyserer vi modellens resultater og undersøger forudsætningsproblemet teoretisk.

Vi undersøger, hvilken mening det giver at anvende den originale Navier-Stokes ligning i et område med kilder og dræn. Det giver os et grundlag for at diskutere valget af denne ligning i forhold til den modificerede Navier-Stokes ligning. Endvidere laver vi en beregning af, hvordan den kinetiske energi i systemet ændrer sig tidsligt i den originale formulering af modellen. Resultatet af denne beregning kan direkte sammenlignes med den tilsvarende beregning, Peskin har lavet for den modificerede Navier-Stokes ligning. Denne beregning giver altså et yderligere grundlag for at diskutere valget af Navier-Stokes ligning på et teoretisk grundlag.

For at analysere de praktiske konsekvenser af valget af Navier-Stokes ligning indbygger vi den af Peskin udledte modificerede Navier-Stokes ligning i modellen. Denne version af modellen vil gennem denne rapport blive omtalt som den modificerede model. Vi implementerer desuden modifikationen i det computerprogram, som løser de diskretiserede ligninger, hvilket ikke tidligere er gjort. Dette sker med henblik på at studere, hvilken betydning det har for modellens resultater, at den modificerede version af Navier-Stokes ligning anvendes. Ved vurderingen af om den modificerede model er bedre eller dårligere end den originale, koncentrerer vi os om at undersøge, på hvilken måde det har betydning for de beskrevne praktiske problemer. Det er dermed ikke vores hensigt at vurdere, om den modificerede model giver resultater, som på andre måder er bedre end den originale model. Specielt vil vi ikke forsøge at tolke resultaterne fysiologisk.

Læsevejledning

Rapporten starter med et kapitel om selve Peskins 2D-hjertemodel, idet den selvfølgelig udgør en nødvendig baggrund for vores arbejde. Samtidig er det en støtte i forbindelse med tolkningen af modellens data. Kapitlet er imidlertid skrevet sådan, at den læser, der er mest er interesseret i projektets overordnede problematik, og mindre i selve hjertemodellen, kan springe videre til kapitel 3 efter afsnit 2.1.

Kapitel 3 og 4 indeholder den teoretiske del af behandlingen af problemet, mens kapitel 5 diskuterer de praktiske konsekvenser af en modifikation af modellen, hvilket sker på baggrund af data fra modelkørsler.

Rapporten indeholder naturligt en del fysik, idet vi behandler en hydrodynamisk model. Vi har selvfølgelig søgt at forklare os efter bedste evne, men læseren bør have et grundlæggende kendskab til klassisk mekanik. Er man ikke familiær med hydrodynamik kan vi anbefale Archeson [1990] og Batchelor [1967], som vi har haft stor glæde af.

Vi anvender Einsteins summationskonvention i de teoretiske beregninger, og denne er præsenteret i bilag B, sammen med et par andre ting angående notation. Endvidere findes der i bilag C en ultrakort præsentation af hjertets anatomi og pumpecyklus.

2 Beskrivelse af Peskins 2D hjertemodel

Dette kapitel indeholder en overordnet forklaring af de grundlæggende træk ved modelleringen i Peskins 2D-hjertemodel. Der er dog samtidig tale om en præsentation, der er meget centreret omkring de dele af modellen, som har relation til de problemer, vi har arbejdet med. Det betyder, at den hydrodynamiske del af modellen, og specielt beskrivelsen af kilder og dræn, er dominerende i denne fremstilling.

Der indledes med en generel sprogligt formuleret præsentation af modellen og de praktiske problemer, der er en del af udgangspunktet for projektet. Dernæst præsenteres modellen i en kontinuert beskrivelse og endelig i en diskretiseret form. Den kontinuerte formulering af modellen kan forstås i sammenhæng med de teoretisk baserede diskusioner i kapitel 3 og 4, mens databehandlingen i kapitel 5 naturligt nok er lavet på baggrund af den diskretiserede model.

Beskrivelsen af modellen er udarbejdet på bagrund af Adeler & Jacobsen [2000] og Thorup [1997], derfor skal disse underforståes, som kilder, hvis ikke andet er nævnt. Vi har udover disse to kilder taget udgangspunkt i selve kildekoden til computerimplementationen af modellen, da specielt detaljerne omkring kilde og dræns beskrivelse fremgår mest præcist der. I forbindelse med dette projekt har vi lavet en modifikation af Peskins 2D-hjertemodel. I hele dette kapitel præsenteres modellen imidlertid som den fremstod forinden denne modifikation, hvilket vil sige en version af modellen, der svarer til den, der beskrives i Adeler & Jacobsen [2000].

2.1 Generel beskrivelse af modellen

Charles Peskins 2D-hjertemodel er en todimensionel (2D) hydrodynamisk model. Det modellerede område er et snit igennem venstre hjertekammer, hvor atrium, ventrikel samt mitralklappen er repræsenterede. Modellen beskriver blodets bevægelse fra det kommer ind i hjertet fra venen, til det pumpes ud i aorta. Hjertemuskulaturen er modelleret ved en kraftpåvirkning på systemet, og det er denne kraftpåvirkning, der får hjertet til at "slå".

I appendix C gives der en kort beskrivelse af hjertet og hjertes pumpecyklus.

Peskin påbegyndte sit arbejde med modellen i sin Ph.D. i 1972. Det primære formål med modellen var at studere interaktionen mellem hjerteklapperne og strømningsmønstret, hvilket blandt andet giver en mulighed for at undersøge forskellige typer af kunstige hjerteklapper [Peskin, 1972a]. Således var det i begyndelsen kun den del af hjertecyklen, hvor blodet strømmer fra atrium til ventrikkel, der blev modelleret (slutningen af diasystolen og atriesystolen). Senere er modellen blevet videreudviklet til at kunne modellere et helt eller flere hjerteslag, blandt andet ved at der er blevet tilføjet kilder og dræn i modellen.

I forbindelse med udviklingen har Peskin arbejdet sammen med en hel række kolleger og studerende, specielt har David M. McQueen spillet en væsentlig rolle for udviklingen af modellen. Omkring 1983 gik Peskin og McQueen over til at arbejde med en tredimensionel version af modellen og forlod dermed den todimensionelle version [Eklund, 1994]. Denne model er imidlertid meget regnetung, og derfor arbejdes der sideløbende videre med 2D-modellen. Dette arbejde er blandt andet lavet af Bio-Math gruppen[1], og specielt har Pernille Thorup Adeler og Jacob Morten Jacobsen lavet en del modifikationer i modellen. Adeler og Jacobsen har blandt andet arbejdet med at omskalere modellen, således at den idag er skaleret til at svare til et menneskehjerte, hvor den før var skaleret som et hundehjerte. Dette arbejde er lavet på baggrund af MR-skanningsdata fra menneskehjerter. [Adeler & Jacobsen, 2000]

2.1.1 Modelleringen

Dette afsnit giver en forklaring af den overordnede struktur af modellen. De nærmere matematiske detaljer vil blive uddybet i de to følgende afsnit.

Den hydrodynamiske model

I modellen beskrives blodet som en usammentrykkelig væske, og derfor anvendes Navier-Stokes ligning for en usammentrykkelig væske til at beskrive systemet. Denne har normalt følgende form

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = \mu\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F} \qquad (2.1.1)$$

hvor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ er hastighedsfeltet, p er trykfeltet, $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ er kraftdensitet (altså kraft pr. areal), ρ er densiteten af væsken og μ er viskositeten. Hastighedsfeltet, trykfeltet og kraftfordelingen afhænger alle af tid og sted, hvorimod densiteten og viskositeten er konstante. Bemærk at da modellen er i 2D, er dimensionen af tryk, densitet og viskositet anderledes end normalt,

[1] En gruppe matematikere med relation til IMFUFA, RUC, der arbejder med matematisk modellering af fysiologiske systemer.

for eksempel er dimensionen af densitet masse pr. areal og ikke masse pr. volumen.

Det er netop formen af ligning 2.1.1, der er til diskussion i forbindelse med dette projekt, men i dette kapitel beskrives modellen, som den fremstod, inden vi begyndte at arbejde med den. Diskussionen af Navier-Stokes ligning påbegyndes således først i kapitel 3.

Udfra Navier-Stokes ligning, en passende kontinuitetsligning (jvf. afsnit 3.1), en beskrivelse af geometrien i systemet, en tidslig beskrivelse af kraftfordelingen og et sæt af begyndelsesbetingelser er det i teorien muligt at beregne, hvordan hastighedsfeltet og trykfeltet[2] udvikler sig i tiden. Det er dog ikke generelt muligt at løse Navier-Stokes ligning analytisk, og man er derfor nødsaget til at benytte en numerisk løsning.

Domænet

Modellen arbejder til alle tider inden for det samme afgrænsede område; beregningsdomænet. Domænet har periodiske randbetingelser, hvilket vil sige, at væske, der strømmer ud gennem en side, kommer ind af den modstående side. Således er det heller ikke noget problem, hvis hjertet bevæger sig ud over domænekanten, da det blot kommer ind ved den modstående side. Domænet er kvadratisk og af samme størrelsesorden som hjertet. Domænet er dog så meget større end hjertet, at man er sikker på, at hastighederne væk fra hjertet er små.

Hjerteranden og mitralklappen

Et særligt karakteristikum ved Peskins 2D-hjertemodel er måden, hvorpå hjerteranden og mitralklappen er modelleret.

Figur 2.1 viser blandt andet hjerteranden og mitralklappen, og det kan være nyttigt at benytte denne figur under læsningen af det følgende.

Hjerteranden er repræsenteret ved en kurve, og denne kurve er omgivet af væske med samme densitet og viskositet på begge sider. Kurven har den egenskab, at den afgrænser et område som repræsenterer det indre af hjertet, og som det senere vil fremgå er det ikke muligt for væsken at trænge igennem denne rand.

Den væske, der er inden for hjerteranden, beskriver blodet i atrium og ventrikel. Væsken uden for hjertet repræsenterer i en eller anden forstand det væv, der omgiver hjertet. Navier-Stokes ligning løses også i dette område, selvom det altså ikke repræsenterer nogen form for faktisk eksisterende fysiologisk væske.

[2]Trykfeltet bestemmes dog kun op til en additiv konstant [Griebel et al., 1998, s 12].

Mitralklapperne er beskrevet ved to kurver i domænet, og på samme måde som for hjerteranden er det ikke muligt for væsken at trænge igennem klapperne. I praksis er hjerteranden og mitralklapperne beskrevet ved en samlet kurve, og der vil i det følgende ikke blive skelnet strengt mellem hjerteranden og den samlede kurve.

Randen har ingen inerti, hvilket betyder, at der ikke kræves en kraft for at accelere den. Endvidere er randen modelleret sådan, at et givet punkt på randen altid har den sammen hastighed, som det ville have, hvis det var et punkt i væsken. På denne måde har man undgået at skulle tage specielt hensyn til randen og gjort at det er muligt at benytte Navier-Stokes ligning til at beskrive hele systemet. Det, at randen bevæger sig med væsken, betyder, at det ikke er muligt for væske at trænge igennem randen, samt at der er en no slip betingelse for væsken ved randen[3].

Randen påvirker væsken gennem et kraftfelt, det vil sige, at i Peskins 2D-hjertemodel beskriver **F** fra ligning 2.1.1 randen. I den kontinuerte formulering af modellen er randkraften kun forskellig fra nul på selve kurven, der repræsenterer randen. I den diskrete formulering af modellen er den kurve, som beskriver randen, imidlertid ikke nødvendigvis sammenfaldende med de diskrete beregningspunkter, og man benytter derfor en distributionsfunktion til at overføre kraften til de diskrete beregningspunkter.

Styrken af kraftfeltet er styret af randens konfiguration og af en tidsafhængig funktion. Dette modelleres ved såkaldte aktive og passive links (jvf. afsnit 2.4.3) der forbinder forskellige punkter på randen. Linksne beskriver blandt andet den tidsafhængige muskelaktivitet i hjertet.

Udover selve randen indeholder modellen også nogle såkaldte virtuelle punkter. De virtuelle punkter er punkter, hvor man kan lade links gå til, uden at væsken bliver påvirket ved punktet. I forbindelse med mitralklapperne findes et sådan punkt. Fra hver af klapperne går et link til dette virtuelle punkt, og fra punktet går endnu et link til et fast punkt på hjerteranden, på figur 2.1 ses disse links aftegnet. På f.eks. figur 5.3 ses det virtuelle punkt som et enkeltstående randpunkt inde i hjertet, og stedet på randen, hvor linket fra det virtuelle punkt ender, ses som en lille indbulning i hjerteranden. Placeringen af dette virtuelle punkt bestemmes af kraftforholdene i linksne. Denne konstruktion er en model af de muskler som i virkeligheden er med til at styre mitralklapperne.

Udover det virtuelle punkt ved mitralklappen findes også en række virtuelle punkter, som bruges til at fastholde hjertet (se 2.1.2). Disse punkter har den egenskab, at de er fast placerede i domænet. På figur 5.3 ses disse punkter tydeligt.

Den metode, hvormed randen er beskrevet i Peskins 2D-hjertemodel, egner sig specielt til systemer, hvor man har en rand, som både flytter sig med væ-

[3]En no slip betingelse ved en rand vil normalt betyde, at man kræver, at væskens hastighed er nul ved randen, hvilket oplagt er opfyldt her, når man betragter væskens hastighed i forhold til randen.

sken, og som samtidig påvirker væsken med en kraft. Det er netop sådan en situation, man har med hjertevæggen. Se for eksempel Peskin [1972b] for en grundlæggende beskrivelse af metoden.

Kilder og dræn

I modellen er der et dræn ved aorta og en kilde[4] i atrium ved venen. Modellering af kilden ved venen og drænet ved aorta sker ved, at man forestiller sig, at der inden for et område opstår eller destrueres væske. For at sikre, at der er den samme mængde væske i domænet hele tiden[5], er der endvidere en ekstern kilde. Det vil sige en kilde uden for selve hjertet. Denne kilde kompenserer for den mængde væske, der totalt forlader eller tilløber hjertet.

Der er to vigtige parametre i beskrivelsen af kilder og dræn; deres placering og strømningshastigheden. Placeringen bestemmes ved en given relation til hjerterandens konfiguration. Strømningshastigheden beskriver hvor stor en mængde af væske, der løber gennem kilden pr. tid. Da væsken er usammentrykkelig, er der ingen forskel på, om man beskriver dette ved, hvor stor en masse af væske, der strømmer ud eller hvor stort et areal af væske, der strømmer ud[6]. Strømningshastigheden for kilden i atrium er bestemt ud fra forskellen mellem trykket ved kilden og et fysiologisk bestemt tryk, svarende til det tryk, der normalt er i venen. Strømningshastigheden for aortadrænet har tidligere været modelleret på tilsvarende vis. Jacobsen har imidlertid lavet en modifikation, således at sammenhængen mellem trykket og strømningshastigheden i den nuværende version af modellen er styret af en såkaldt windkesselmodel. Windkesselmodellen beskriver resten af blodkredsløbets respons på hjertets udpumpning[7], og den konkrete windkessel model indeholder blandt andet en model af aortaklappen (jvf. afsnit 2.2.5). Strømningshastigheden ved den eksterne kilde er naturligvis styret af de to andre strømningshastigheder, idet den eksterne kilde jo kompenserer for den mængde væske, der i alt kommer ind i eller forsvinder fra domænet via de interne kilder og dræn.

Kilder og dræn modelleres i praksis ved, at man ændrer på den styrende kontinuitetsligning, og det er matematisk betragtet denne ændring, der giver anledning til, at kilder og dræn har betydning for impulsregnskabet og dermed for formen af ligning 2.1.1 (jvf. afsnit 3.1).

[4]Ordet kilde bruges i en generaliseret betydning som fællesbetegnelse for steder, hvor væske kan løbe ind og ud af systemet, dræn derimod bruges om steder, hvor der kun kan løbe væske ud.

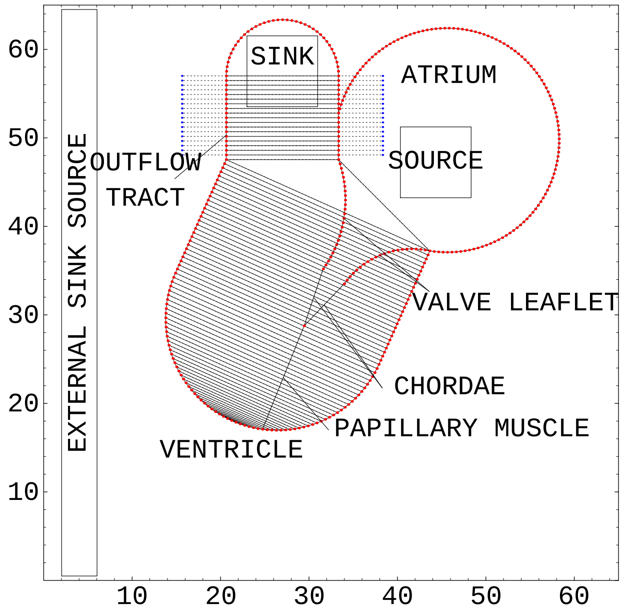
[5]Dette er nødvendigt for at kunne bibeholde det samme beregningsdomæne til alle tider, idet væsken jo antages at være inkompressibel.

[6]Husk modellen er i 2D; i 3D ville det have været volumen af væske.

[7]For en beskrivelse af forskellige typer windkesselmodeller se for eksempel Andersen et al. [2000]

Initialkonfigurationen

Initialkonfigurationen af modellen indeholder en beskrivelse af, hvordan hjerteranden er placeret, en beskrivelse af hastighedsfeltet (som er nul over hele domænet til starttidspunktet) og en beskrivelse af hvor i hjertecyklen, hjertet befinder sig. Initialkonfigurationen er meget fleksibel, hvilket gør det muligt at matche hjertemodellen med for eksempel skanningsdata fra mennesker. På figur 2.1 ses en skitse over beregningsdomænet, hjerteranden og kilderne som de er placeret ved beregningens begyndelse.



Figur 2.1 Skitse af hjertet som det er beskrevet i modellen (her initialbetingelserne). De tværgående linjer er de i teksten omtalte aktive og passive links.

In- og output

Overordnet set er input til modellen en funktion, som beskriver den tidsafhængige muskelaktivitet, og output er tidsafhængige hastigheds- og trykfelter samt en beskrivelse af væskestrømmen gennem aorta og venen. Endvidere er der en stor mængde parametre, der kan varieres i modellen, men som ikke er funktioner af tiden; for eksempel viskositeten, randens initialkonfiguration og trykket ved venen.

Beregningsalgoritmen

Når modellen er diskretiseret passende (jvf. afsnit 2.4), angiver følgende algoritme, hvordan beregning af hastighedsfeltet og randens konfiguration til et tidsskridt findes ud fra feltet og konfigurationen til foregående tidsskridt.

- Find randens kraft for herværende tidsskridt ud fra randens konfiguration. Man kunne benytte randens aktuelle konfiguration til direkte at finde kraften, men den fremgangsmåde giver et meget ustabilt system, derfor benyttes følgende algoritme.
  - På baggrund af hastighedsfeltet beregnes et foreløbigt gæt på randens nye konfiguration (dette gæt benyttes kun til denne beregning).
  - Ud fra det fundne gæt på en konfiguration beregnes randens kraft.
- Distribuer den fundne kraft til de diskrete beregningspunkter.
- Beregn hastighedsfeltet til næste tidsskridt; dette beregnes kun i de diskrete beregningspunkter. Trykket i modellen har som før beskrevet indflydelse på kilder og dræn, specielt er det trykket ved aorta, som bestemmer om aortaklappen skal være lukket eller åben. Der benyttes følgende algoritme.
  - Beregn et foreløbig gæt på det tryk der pumpes ud imod ved aorta.
  - Beregn trykket i hjertet på baggrund af aortaklappens nuværende tilstand.
  - Undersøg om det fundne tryk giver anledning til, at aortaklappen skal ændre tilstand. Hvis det er tilfældet ændres tilstanden, og trykket i hjertet genberegnes.
  - Foretag den endelige opdatering af det tryk der pumpes ud imod ved aorta.
- Beregn væskens hastighed ved randen ud fra det diskrete felt, og lad randen flytte sig med væsken.

Denne algoritme beskriver hovedtrækkene i de beregninger som foretages i computerimplementationen af modellen.

2.1.2 Modellens praktiske problemer

Da det er muligt at sammenligne modellens resultater med skanninger fra mennesker, har det også været muligt at konkludere, at modellen på mange måder giver nogle gode resultater. For eksempel har modellen givet anledning til optagelsen af et patent på en kunstig hjerteklap [*Researcher Profiles: Charles S. Peskin and David M. McQueen, Courant Institute of Mathematical Sciences*, 1995].

Som beskrevet i indledningen er der imidlertid stadig nogle praktiske problemer med modellen. Disse problemer kan overkommes, men indtil videre sker det ved nogle metoder, der ikke er fysiologisk eller teoretisk baserede.

Det største praktiske problem er, at for at få stabilitet i den numeriske metode er det nødvendigt at opskalere viskositeten. Hvis dette ikke gøres, bliver hastighederne pludselig for store og dermed ufysiologiske. Skaleringen gøres i praksis, ved at man skalerer hjertets størrelse og hjerteslagstiden passende (se afsnit 2.3 for en nærmere diskution af skaleringen). Peskin forsøger i sin Ph.D. afhandling [Peskin, 1972a, Afsnit V] at redegøre for, hvorfor dette ikke har nogen særlige betydning. Imidlertid er der idag ønske om at anvende modellen i en sammenhæng, hvor det anses for væsentligt, at viskositeten ikke er opskaleret [Jesper Larsen, 2000].

Som det vises i forbindelse med databehandlingen i afsnit 5.6, bevæger hjerteranden sig meget rundt[8], hvis den ikke begrænses i sin bevægelsesmulighed. Adeler og Jacobsen har derfor indbygget en mulighed for at gøre netop dette således, at hjerteranden kun kan lave mindre bevægelser i domænet. Fastholdelsen af hjertet er lavet ved at tilføje nogle ekstra passive links, svarende til de passive links, der indgår som en del af modelleringen af muskelstrukturen (jvf. afsnit 2.4 s. 21). De ekstra passive links er hver især knyttet til et punkt på randen, samt et gitterpunkt i domænet. Linksene er kun placeret omkring drænet ved aorta, og hjertet begrænses altså ikke fuldstændigt i sin bevægelse.

For begge de to praktiske problemer og deres løsninger gælder, at kan være udtryk for, at der i en eller anden forstand er for meget kinetisk energi i systemet.

Hvis viskositeten ikke opskaleres bliver hastighederne som nævnt unaturligt store, og det svarer til, at den kinetiske energi bliver unaturlig stor. Ved at opskalere viskositeten dissiperes der kinetisk energi ud af systemet på en kunstig måde. Når hjerteranden begrænses i sin bevægelse, påvirkes væskens bevægelse nødvendigvis også (jvf. afsnit 2.2.2). Da hjerteranden bremses, er det umiddelbart oplagt at forestille sig, at væsken også bremses, hviket vil betyde, at den kinetiske energi af systemet sænkes.

Det er, som det også står i indledningen, denne relation mellem systemets energi og de praktiske problemer, der er baggrunden for tesen om at disse problemer er knyttet til valget af Navier-Stokes ligning. Selve forudsætningsproblemet, der er baggrunden for rapportens diskussion om valg af Navier-Stokes ligning, behandles ikke videre her, idet det allerede er beskrevet i rimelig detalje i indledningen. Der gives en mere matematisk formuleret indføring i forudsætningsproblemet i afsnit 3.1.

2.2 Kontinuert beskrivelse af modellen

Dette afsnit præsenterer Peskins 2D-hjertemodel kontinuert. Denne beskrivelse er på mange måder mest egnet som baggrund for den senere diskussion af forudsætningsproblemet, hvorimod den diskrete beskrivelse, som findes i afsnit 2.4, har mere praktisk betydning. Som i resten af dette kapitel lægges

[8]Størrelsesordenen af bevægelsen er en domænebredde pr. hjerteslag.

der i dette afsnit relativ stor vægt på den hydrodynamiske del af modelleringen, specielt beskrivelsen af kilde og dræn, idet det er denne del af modellen, vi senere vil analysere og modificere.

Da tolkningen af de forskellige dele af modellen er beskrevet i foregående afsnit, er dette afsnit centreret omkring en matematisk beskrivelse af modellens struktur.

2.2.1 Domænet for modellen

Domænet for modellen Ω er et rektangulært domæne med periodiske randbetingelser. Igennem denne rapport vil vi altid benytte et kvadratisk domæne, og dermed har vi kun behov for en parameter til at beskrive domænets størrelse: domænebredden H.

Domænet har periodiske randbetingelser, hvilket vil sige, at $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ og $p(\mathbf{x})$ er periodiske med domænebredden H som periode, hvilket kan formaliseres som

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + H\mathbf{n})$$

hvor $\mathbf{x}$ er en positionsvektor og $\mathbf{n}$ er en enhedsnormal til en domænerand.

Gennem resten af denne rapport antages det, at koordinatsystemet er placeret med $(0, 0)$ i nederste venstre hjørne af domænet og med akserne langs domænevæggen. Det betyder, at ovenstående periodisitetsbetingelse kan skrives som

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + H\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + H\mathbf{e}_2)$$

hvor $\mathbf{x}$ som altid er en positionsvektor, $\mathbf{e}_1$ er enhedsvektoren i førsteaksens retning og $\mathbf{e}_2$ tilsvarende i andenaksens retning.

2.2.2 Hjerteranden

Randen er en lukket kurve og kan matematisk repræsenteres som en parametriseret kurve $\mathbf{X}(s, t), 0 \leq s \leq L$, hvor t er tiden, og L er længden af parameterintervallet. Bemærk at randen ikke har samme længde hele tiden, og derfor er parametriseringen stærkt tidsafhængig. Dette kan synes besværligt, men i den diskrete beskrivelse viser det sig at være meget operationelt.

Som før beskrevet, kræver man, at randen overalt har samme hastighed som den omgivende væske. Det vil i denne beskrivelse sige:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t)$$

hvilket mere operationelt kan skrives

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s,t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t))\; d\mathbf{x} \tag{2.2.1}$$

hvor δ er Diracs deltafunktion i to dimensioner[9].

Hjerterandens påvirkning af den omgivende væske beskrives, som før omtalt, via den kraft, den påvirker væsken med. Kraften er bestemt af den aktuelle geometriske konfiguration af hjerteranden, og af hvor i hjertecyklen modellen befinder sig. Kraften bestemmes af de aktive og passive links. Disse links har ikke nogen oplagt kontinuert beskrivelse og vil derfor blive beskrevet i større detalje i den diskrete beskrivelse af modellen (se afsnit 2.4.1).

Kraftdensiteten i randen (med hensyn til parameterintervallet) er givet ved en funktion $\mathbf{f}(s,t)$. Det vil sige, at den kraft, som et lille stykke af randen ds påvirker væsken med, er givet ved $\mathbf{f}(s,t)ds$. Bemærk at længden af stykket er målt som længden af parameterintervallet, og den er derfor ikke nødvendigvis det samme som den fysiske længde af randstykket.

Sammenhængen mellem denne randkraft og den kraftdensitet (målt som kraft pr. areal), som indgår i de styrende ligninger (se f.eks ligning 2.1.1), er givet ved[10]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \int_0^L \mathbf{f}(s,t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t))\; d\mathbf{s} \tag{2.2.2}$$

Af denne ligning ses det, at randkraftfeltet kun er forskelligt fra nul der, hvor randen befinder sig.

2.2.3 Beskrivelse af kilder og dræn

Som nævnt i afsnit 2.1.1 er kilder og dræn modelleret ved, at der inden for et område opstår eller destrueres væske. Dette beskrives ved en funktion $\psi(\mathbf{x},t)$, hvor ψ er en strømningshastighedsfordeling, altså en beskrivelse af hvor meget væske, der forsvinder/opstår pr. tid pr. areal. ψ er nul i det meste af domænet bortset fra de områder, hvor der er modelleret kilder og dræn.

Der er tre sådanne kildeområder i modellen; to inden for selve hjerteranden (et ved aorta og et ved venen) samt et område uden for hjertet.

Strømningshastigheden, der beskriver den samlede mængde af væske, som opstår pr. tid, er givet ved en funktion $Q_k(t)$, hvor $Q_k(t)$ regnes med fortegn. k angiver hvilken kilde, der er tale om efter følgende skema

$$\begin{array}{ll} k=1 & \text{: kilden ved venen} \\ k=2 & \text{: drænet ved aorta} \\ k=ex & \text{: den eksterne kilde} \end{array} \tag{2.2.3}$$

[9] δ har den fysiske dimension pr. areal, når man regner i to dimensioner.

[10] For en nærmere redegørelse af den kontinuerte beskrivelse af randkraften, se Thorup [1997].

Kravet om at den samlede mængde af væske i domænet skal være konstant kan således formuleres som

$$0 = \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = Q_{ex}(t) + \sum_{k=1}^{2} Q_k(t) \tag{2.2.4}$$

Sammenhængen mellem ψ og Q er givet ved

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Q_{ex}(t) w_{ex}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{ex}(t)) + \sum_{k=1}^{2} Q_k(t) w_{int}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k(t)) \tag{2.2.5}$$

hvor $\mathbf{X}_k(t)$ og $\mathbf{X}_{ex}(t)$ angiver positionen af den givne kilde til et hvert tidspunkt, og w_{ex} samt w_{int} er fordelingsfunktioner for henholdsvis den eksterne og de interne kilder. I modellen er kilderne rektangulære (de interne er kvadratiske), og positionen er angivet som positionen for det punkt, hvor diagonalerne skærer hinanden (for den eksterne kilde er det dog kun første koordinaten, der har en betydning).

Fordelingsfunktionen for de interne kilder er givet ved

$$w_{int}(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b}\right)^2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{b/2} x_1\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{b/2} x_2\right)\right) & \text{for } (x_1, x_2) \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]^2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Hvor b er bredden af det kvadratiske område, hvor på den givne kilde er modelleret (i praksis er b fastholdt på $1/8$ domænebredde). Denne definition af w_{int} sikrer at,

$$\int_\Omega w_{int}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k(t))\, d\mathbf{x} = 1$$

hvilket er et krav for, at den kan være en fordelingsfunktion. Den eksterne kilde er defineret på et rektangulært område, der er domænelængden H i højden og har en bredde b'. Bredden b' er smal i forhold til domænets bredde (i praksis $1/16$ af denne), således at den eksterne kilde ikke kommer i karambolage med hjerteranden.

Fordelingsfunktionen for den eksterne kilde er givet ved

$$w(x_1, x_2) = w(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{b'H} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{b'/2} x_1\right)\right) & \text{for } (x_1, x_2) \in \left[-\frac{b'}{2}, \frac{b'}{2}\right] \times [0, H] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{2.2.6}$$

og her gælder det også at

$$\int_\Omega w_{ex}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k(t))\, d\mathbf{x} = 1$$

Inden det er muligt at forklare, hvordan Q_k beskrives, er det nødvendigt at forklare, hvordan man bestemmer trykket i systemet.

2.2.4 Tryk i modellen

Trykket i modellen kan kun bestemmes op til en additiv konstant. Det vil sige, at man kun kan udtale sig fornuftigt om trykforskelle og ikke om absolutte tryk. I modellen er det valgt, at referencetrykket er et vægtet middel over trykket ved den eksterne kilde. Fordelingsfunktionen for den eksterne kilde (se ligning 2.2.6) anvendes som vægt. Det giver følgende formel for referencetrykket (P_0)

$$P_0(t) = \int_\Omega p(\mathbf{x}, t) w_{ex}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{ex}(t)) d\mathbf{x}$$

Ud fra dette referencetryk kan alle andre tryk nu beregnes.

Trykket ved de interne kilder og dræn indgår i forskellige sammenhænge. Trykket er naturligvis ikke givet ved en enkelt værdi, da der netop er tale om en model med fordelte kilder og dræn. For at kunne tale om et enkelt tryk benyttes også her et vægtet middeltryk. Trykket ved den k'te kilde (P_k) er givet ved (hvor $k \in \{1, 2\}$ og ellers som i ligning 2.2.3)

$$P_k(t) = \int_\Omega p(\mathbf{x}, t) w_{int}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k(t)) d\mathbf{x} - P_0(t) \tag{2.2.7}$$

2.2.5 Styring af kilder og dræn

Ud fra det i ligning 2.2.7 beskrevne tryk ved de interne kilder er det muligt at beskrive, hvordan sammenhængen mellem tryk og strømningshastighed nærmere er givet.

Kilden i atrium

Essensen i styringen af strømningshastigheden ved kilden i atrium (altså modellen af venen) er, at hvis trykket ved kilden er mindre end et fast referencetryk, løber der væske ind i hjertet, og er trykket omvendt større ved kilden, løber blodet ud af hjertet. Det vil sige, at der godt kan løbe blod ud af hjertet gennem venen.

Strømningshastigheden for atriumkilden, $Q_1(t)$, er givet ved

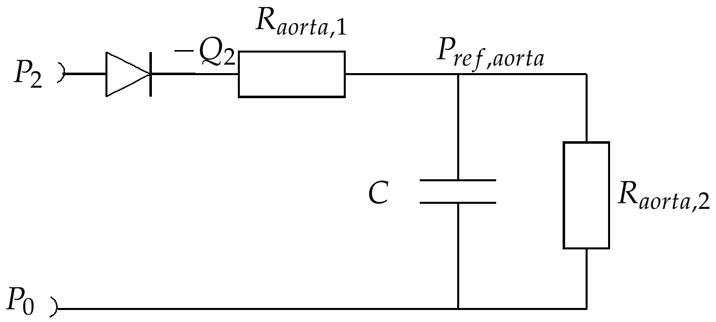
$$Q_1(t) = \frac{P_{\text{ref,vene}} - P_1}{R_{\text{vene}}}$$

hvor $P_{\text{ref,vene}}$ og R_{vene} er fysiologisk relaterede parametre.

Drænet til aorta

Som nævnt i afsnit 2.1.1 beskrives sammenhængen mellem trykket ved aortadrænet og strømningshastigheden ved en windkesselmodel. Windkesselmodellen er en model, der modellerer responset fra aorta, eller hele arteriesystemet om man vil. Modellen tager altså højde for, at hjertet ikke pumper ud mod et konstant tryk.

Den version af windkesselmodellen, der benyttes i modellen, kan repræsenteres ved det elektriske kredsløb, der er skitseret på figur 2.2. Analogien mellem det elektriske system og det hydrodynamiske system er, at trykket svarer til en elektrisk spænding, og strømningshastigheden svarer til den elektriske strøm.



Figur 2.2 Elektrisk netværk, der svarer til den anvendte Windkesselmodel.

Dioden i netværket modellerer aortaklappen. Denne sikrer, at væsken kun kan løbe ud gennem aorta og ikke ind af den. Dioden/klappen åbner, hvis trykket uden for hjertet er mindre end trykket i hjertet. Det vil sige, at strømnings hastigheden ved drænet til aorta, $Q_2(t)$, kan beskrives ved

$$-Q_2(t) = \begin{cases} \frac{P_2(t) - P_{\text{ref,aorta}}(t)}{R_{\text{aorta,1}}} & \text{for } P_2(t) > P_{\text{ref,aorta}}(t) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Det tryk, der pumpes ud imod $(P_{\text{ref,aorta}}(t))$, styres af følgende differentialligning

$$-Q_2(t) = C\frac{\mathrm{d}P_{\text{ref,aorta}}}{\mathrm{d}t} + \frac{P_{\text{ref,aorta}}(t)}{R_{\text{aorta,2}}} \tag{2.2.9}$$

På denne form følger differentialligningen direkte af sammenhængen mellem tryk og strøm (alias spænding og strøm) for henholdsvis modstand og kapacitor, og det faktum at den samlede strøm er lig summen af strømmen gennem C og $R_{\text{aorta,2}}$.

2.2.6 De styrende ligninger

Som beskrevet i afsnit 2.1.1 er den styrende ligning Navier-Stokes ligning for en usammentrykkelig væske sammen med en kontinuitetsligning.

I den originale version af modellen er det følgende sæt ligninger, der løses.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = \mu\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F} \tag{2.2.10}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \psi \tag{2.2.11}$$

Normalt er kontinuitetsligningen for en usammentrykkelig væske $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, men når der er kilder og dræn i systemet er dette ikke tilfældet. Med den beskrivelse af kilder og dræn, der anvendes i Peskins 2D-hjertemodel, bliver kontinuitetsligningen $\nabla\cdot\mathbf{u} = \psi$, hvor ψ er den i ligning 2.2.5 beskrevne strømningshastighedsfordeling. Dette vises i afsnit 3.1, hvor det også forklares, hvordan denne ændring af kontinuitetsligningen hænger sammen med forudsætningsproblemet og dermed diskussionen omkring valg af Navier-Stokes ligning.

Man kan ikke generelt løse ligning 2.2.10 og 2.2.11 analytisk. Det er derfor, at hele modellen er diskretisret. Denne diskretisering beskrives i afsnit 2.4.

2.3 Omskrivning til naturlige enheder

Når man arbejder med matematiske modeller, er det standard at beskrive systemet i såkaldte dimensionsløse størrelser. Dette giver mange fordele, og i implementationen af Peskins 2D-hjertemodel arbejdes der også med sådanne. Derfor vil vi beskrive denne teknik og de praktiske konsekvenser af den. Vi har dog valgt et lidt andet sprogbrug, end man normalt gør, hvilket der vil blive gjort rede for.

Normalt arbejde man med dimensionsløse størrelser, som er defineret således

$$\text{Dimensionsløs størrelse} = \frac{\text{Størrelse med dimension}}{\text{Referencestørrelse med samme dimension}}$$

hvor referencestørrelsen er en for det beskrevne system typisk størrelse. [Griebel et al., 1998, s 18]

Da vi ønsker at have mulighed for at benyttet dimensionsanalyse[11], foretrækker vi, at man tænker på omskrivningen som en overgang til naturlige enheder. Der er imidlertid kun tale om en konceptuel anderledes metode. Operationelt er der ingen forskel, i den forstand at det er de samme tal, der skal ganges og divideres.

[11]Ordet dimensionsanalyse henviser til det forhold, at man ud fra dimensionen af en række relaterede fysiske størrelser kan udtale sig om, hvordan de er relaterede.

Overgangen til naturlige enheder kan beskrives ved følgende omskrivning

$$\text{Størrelse i naturlig enhed} = \frac{\text{Størrelse i normal enhed}}{\text{Konverteringsfaktor fra normal til naturlig enhed}}$$

hvor konverteringsfaktoren er dimensionsløs, med enheden

$$\frac{\text{Original enhed}}{\text{Naturlig enhed}}$$

I modellen er de valgte naturlige størrelser:

Længde: Bredden af domænet, Ω: H

Tid: Længden af et hjerteslag: T

I den resterende del af rapporten benævnes de naturlige enheder for henholdsvis længde og tid, med H og T, og disse enheder har samme dimmension som de normale `cgs` enheder.

Konverteringsfaktoren for en længde, angivet i centimeter, bliver det antal centimeter domænet er bredt, med enheden $\frac{\text{cm}}{\text{domænelængde}}$. Angives denne konverteringsfaktor med H', og indføres T' tilsvarende kan omskrivning til de naturlige enheder beskrives således, (hvor variable i naturlige enheder er markeret med *, og hvor det er angivet, hvilken enhed de forskellige størrelser er i)

$$\begin{array}{rcl|l}
\mathbf{x}^* & = & \frac{\mathbf{x}}{H'} & H \\
t^* & = & \frac{t}{T'} & T \\
\mathbf{u}^* & = & \frac{\mathbf{u}T'}{H'} & \frac{H}{T} \\
\left(\frac{p}{\rho}\right)^* & = & \frac{p}{\rho}\frac{T'^2}{H'^2} & \frac{H^2}{T^2} \\
\nu^* = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^* & = & \frac{\mu}{\rho}\frac{T'}{H'^2} & \frac{H^2}{T} \\
\left(\frac{\mathbf{F}}{\rho}\right)^* & = & \frac{\mathbf{F}}{\rho}\frac{T'^2}{H'} & \frac{H}{T^2}
\end{array}$$

ν^* er den kinematiske viskositet i naturlige enheder, denne svarer til den reciprokke værdi af det såkaldte Reynoldstal[12].

Hvis man tager udgangspunkt i Navier-Stokes ligning, hvor man har divideret igennem med ρ, får man i de naturlige variable

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}^*\right) = \nu^* \nabla^2 \mathbf{u}^* - \nabla \left(\frac{p}{\rho}\right)^* + \left(\frac{\mathbf{F}}{\rho}\right)^*$$

[12]Under den forudsætning at $1^{H}/_{T}$ betragtes som en karakteristisk hastighed for systemet, idet Reynoldstallet normalt defineres som en karakteristisk hastighed gange en karakteristisk længde divideret med den kinematiske viskositet.

Af denne ligning ses det, at der kun indgår to parametre nemlig den kinematiske viskositet ν og kraftdensiteten pr. densitet ${}^{F_i}/_{\rho}$. Disse to konstanter er dermed bestemmende for den dynamiske opførsel af et system. Det vil sige, at hvis man i to forskellige systemer kommer frem til, at disse to størrelser er de samme, når man går til naturlige enheder, får disse systemer den samme dynamiske opførsel. Det er denne egenskab, der er grundlaget for skalaforsøg, hvor man typisk formindsker længdestørrelser og derefter ændrer viskositeten passende. [Griebel et al., 1998, s19]

Som beskrevet i afsnit 2.1.2 skaleres viskositeten op i Peskins 2D-hjertemodel for at overkomme problemer med numerisk ustabilitet. Dette gøres i praksis ved, at man nedskalerer længder og tider med en faktor (den såkaldte gamma faktor $0 < \gamma \leq 1$). Af udtrykket for den kinematiske viskositet i naturlige enheder ses det, at dette svarer til en opskalering af ν med en faktor ${}^{1}/_{\gamma}$ Den nødvendige ændring af kraftledet foregår implicit, da relevante størrelser for dette findes ud fra forskellige andre sammenhænge i modellen [Jacob Morten Jacobsen, 2000].

I den efterfølgende beskrivelse vil det, hvor ikke andet er nævnt, være underforstået at alle størrelser er i naturlige enheder (det vil sige, at vi ikke skriver $\mathbf{u}^*$, men blot $\mathbf{u}$).

2.4 Diskret beskrivelse af modellen

For at kunne regne på Peskins 2D-hjertemodeler det nødvendigt at beskrive den diskret. Det betyder, at man "kun" regner på et givet antal punkter inden for modellens domæne, hvilket blandt andet medfører, at differentialoperatorer skal oversættes til differensoperatorer. I dette afsnit beskrives diskretiseringen af modellen.

2.4.1 Diskretisering af indgående størrelser

Domænet og tiden

Modellen er som nævnt i afsnit 2.2.1 beskrevet på et afgrænset domæne (som det også før er nævnt, regner vi alle steder med at domænet er kvadratisk) med periodiske randbetingelser.

I den diskrete formulering beskrives dette som et kvadratisk gitter med en given afstand mellem gitterpunkterne (gitterbredden) h. Det vil sige, at alle punkter i domænet beskrives som $\mathbf{x}_{i,j} = (x, y) = (hi, hj)$ hvor $i, j = 1 \ldots N_h$. Antallet af gitterpunkter N_h giver dermed den rumlige opløsning af diskretiseringen, da følgende betingelse skal være opfyldt $N_h = \frac{H}{h}$, hvor H som før er domænebredden. I naturlige variable bliver domænebredden pr. definition 1, og derfor er h udtryk i naturlige enheder $1/N_h$. At domænet er periodisk betyder at $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{x}_{i+N_h,j} = \mathbf{x}_{i,j+N_h}$, hvor $\mathbf{x}_{i,j}$ er en positionsvektor. Tilsvarende gælder for hastighedsfelt og tryk.

Når man taler om for eksempel hastighedsfeltet, er det underforstået, at man kun beregner dets værdi i gitterpunkterne. Hvis man har behov for at tale om feltet uden for gitterpunkterne, approksimeres dette ud fra værdien i disse[13].

På tilsvarende måde diskretiseres tiden, med tidsskridtslængde Δt så $t = n\Delta t$ hvor $n \in \mathbf{N} \cup 0$. Tidsskridtslængden defineres ud fra, hvor mange tidsskridt man ønsker pr. hjerteslag på følgende oplagte måde

$$\Delta t = \frac{T}{\text{ønsket antal tidsskridt pr. hjerteslag}}$$

hvor T er længden af et hjerteslag. I naturlige enheder får man analogt til ovenfor at $\Delta t = \frac{1}{\text{ønsket antal tidsskridt pr. hjerteslag}}$

Igennem det følgende vil i, j som fodtegn angive en variabels værdi i et givet gitterpunkt, for eksempel er $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}(hi, hj)$ og tilsvarende er $\mathbf{u}^n$ værdien af $\mathbf{u}$ til det n'te tidsskridt.

Hjerteranden

Da man regner på et ret groft gitter, forlanges det ikke, at hjerterandens position kan beskrives ved gitterpukterne. Diskretisering af randen er derfor foretaget uafhængigt af den øvrige rummelige diskretisering af modellen.

I den kontinuerte formulering har man som beskrevet i afsnit 2.2.2 randens position beskrevet som en funktion af et fast parameterinterval, mens parametriseringen er tidsafhængig. I den diskrete formulering deles parameterintervallet op i et passende antal dele af længe Δs, hvor $\Delta s = \frac{L}{N_b}$ L er længden af parameterintervallet, og N_b er det ønskede antal randpunkter.

Randens position til tiden n er derfor beskrevet ved

$$\mathbf{X}_k^n = \mathbf{X}(k\Delta s, n\Delta t)$$

hvor $k = 0 \ldots N_b$.

I den diskrete formulering er der til hvert randpunkt associeret en kraft, $\mathbf{f}_k^n$, i modsætning til i den kontinuerte formulering, hvor man opererer med en kontinuert kraftfordeling langs randen. Sammenhængen mellem den kontinuerte kraftfordeling $\mathbf{f}(s,t)$ (som er kraft pr. længde, hvor længden er målt på parameterintervallet) og den diskrete kraft $\mathbf{f}_k^n$ er givet på følgende måde

$$\mathbf{f}_k^n = \mathbf{f}^n(k\Delta s)\Delta s = \mathbf{f}(k\Delta s, n\Delta t)\Delta s$$

Når man i beregningerne skal bruge kraftpåvirkningen i et givet gitterpunkt, benytter man en funktion, som fordeler kraften fra randen ud over et areal,

[13] Et eksempel på det er hastighederne ved hjerterandens position, hvilket beskrives senere.

og på den måde omdannes den konkrete kraft til en krafdistribution over et areal. Dette vil blive beskrevet nærmere i afsnit 2.4.3. Det vil også fremgå, at det kun er selve kraften $\mathbf{f}_k^n$, som får en betydning i diskretiseringen.

2.4.2 Diskretisering af den matematiske formalisme

Inden det er muligt at beskrive, hvordan man diskretiserer det modellerede system, er der et par operatorer og matematiske entiteter, der skal på plads.

Differensoperatorer

De stedsligt afledte beskrives i nogle sammenhænge ved de tre oplagte differensoperatorer. Disse er her vist som afledte i førsteaksens retning

$$(D_1^+\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h} \tag{2.4.1}$$

$$(D_1^-\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h} \tag{2.4.2}$$

$$(D_1^0\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h} \tag{2.4.3}$$

hvor φ er en funktion af stedet.

Operatorerne defineres analogt i andenaksens retning og betegnes i denne rapport som D_2^+, D_2^- og D_2^0.

Approksimation af Diracs deltafunktion

I modellen anvendes en approksimation til Diracs deltafunktion δ. Denne bruges dels i forbindelse med definitionen af en diskret version af operatoren ∇ og dels til at beskrive koblingen mellem randkraften og væsken (se ligning 2.2.2 og 2.2.1).

Den todimensionale tilnærmelse til deltafunktionen er givet på følgende måde

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \delta_h'(x_1)\delta_h'(x_2) \text{ for } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \tag{2.4.4}$$

hvor

$$\delta_h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{2h}\right) & \text{for } |x| \leq 2h \\ 0 & \text{for } |x| > 2h \end{cases}$$

Bemærk at man i forbindelse med randen har behov for at se på $\delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X})$, hvor $\mathbf{X}$ er et randpunkt, og derfor ikke ligger i et gitterpunkt.

I Thorup [1997] bliver der argumenteret for, at dette valg af approksimation til deltafunktionen er fornuftigt, da de vigtigste hovedtræk fra den normale deltafunktion genfindes ved denne tilnærmelse. I appendiks D har vi skitseret disse egenskaber.

Det interpolerede hastighedsfelt

Ud fra δ_h kan man definere det interpolerede hastighedsfelt $\mathbf{U}$. Dette bruges i to sammenhænge. For det første bruges det til at bestemme randens hastighed, og for det andet bruges det i forbindelse med definitionen af en diskret version af differentialoperatoren ∇

$\mathbf{U}$ defineres på følgende måde

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \sum_{i,j} \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i,j})\delta_h(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{X})h^2$$

Hvor $\mathbf{X}$ er et vilkårligt punkt i beregningsdomænet, h er gitterbredden og der summeres over alle gitterpunkter.

Det vil sige at $\mathbf{U}$ afhænger vægtet af hastigheden i de nærmeste gitterpunkter.

En diskret version af differentialoperatoren ∇

I forbindelse med diskretiseringen af Navier-Stokes ligning indgår der en diskret analog til den kontinuerte operator ∇. Den diskrete version af ∇ bruges både til beregning af divergenser og gradienter af de diskret definerede felter.

Operatoren er defineret på baggrund af en diskret divergens af hastighedsfeltet. Denne diskrete divergens af hastighedsfeltet $\mathbf{u}$ defineres i et punkt, $\mathbf{x}$, som gennemsnittet af divergensen af det interpolerede hastighedsfelt, $\mathbf{U}$, over et område, $B(\mathbf{x})$, på følgende måde

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \int_{B(\mathbf{x})} (\nabla \cdot \mathbf{U})(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' \tag{2.4.5}$$

hvor $B(\mathbf{x})$ er en kvadratisk boks med centrum i $\mathbf{x}$ og sidelængde h, hvor h som ellers er gitterbredden.

Man kan gennem et længere regnestykke[14] vise, at dette svarer til følgende definition af $\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$, hvor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, og $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \sum_{x_1', x_2'} \left[u_1(x_1', x_2')\gamma(x_1 - x_1')\omega(x_2 - x_2') + u_2(x_1', x_2')\omega(x_1 - x_1')\gamma(x_2 - x_2') \right] \tag{2.4.6}$$

[14] Dette er gennemgået i detaljer i Thorup [1997].

hvor der summeres over alle gitterpunkter og

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \delta'_h(x+h/2) - \delta'_h(x-h/2) \\ \omega(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta'_h(x+X)\,dX\end{aligned}$$

På baggrund ligning 2.4.6 defineres den diskrete version af differentialoperatoren ∇ som

$$\mathbf{D} = (D_1, D_2)$$

hvor

$$\begin{aligned}(D_1\varphi)(\mathbf{x}) &= \sum_{x'_1,x'_2} \left[\varphi(x'_1,x'_2)\gamma(x_1-x'_1)\omega(x_2-x'_2)\right] \\ (D_2\varphi)(\mathbf{x}) &= \sum_{x'_1,x'_2} \left[\varphi(x'_1,x'_2)\omega(x_1-x'_1)\gamma(x_2-x'_2)\right]\end{aligned}$$

for en vilkårlig funktion φ og med $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, og hvor summen som normalt tages over alle gitterpunkter.

2.4.3 Diskretisering af modellen

Det er nu muligt at opskrive en diskret version af selve bestanddelene af modellen. Som det første beskrives det, hvordan man finder kraftdensiteten ud fra den på randen definerede kraft.

Kraftfeltet

Med den indførte tilnærmelse til deltafunktionen kan man opskrive en direkte diskretisering af ligning 2.2.2

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^n(\mathbf{x}_{ij}) &= \sum_k \mathbf{f}^n(k\Delta s)\delta_h(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}^n(k\Delta s))\Delta s \\ &= \sum_k \mathbf{f}^n_k \delta_h(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}^n_k)\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Hvor k summeres over antallet af randpunkter, og de i afsnit 2.4.1 beskrevne sammenhænge og notationer er benyttet.

Det ses af denne opskrivning, at det, som nævnt, kun er kraften i det enkelte randpunkt, $\mathbf{f}^n_k$, som det er nødvendigt at finde.

$\mathbf{f}^n_k$ findes ud fra den aktuelle konfiguration af randen på baggrund af de tidligere nævnte links. Linksene betyder i praksis, at man lader de forskellige randpunkter udøver en kraft på hinanden. Kraften på randpunkt m fra randpunkt n $\mathbf{f}'_{m,n}$ er givet som

$$\mathbf{f}'_{m,n} = T_{m,n}(|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m|)\frac{\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m}{|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m|}$$

hvor $\mathbf{X}_n$ og $\mathbf{X}_m$ er positionsvektorerne, og $T_{m,n}(|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m|)$ er spændingen i linket, som er en funktion af tiden og af afstanden mellem randpunkterne.

Den total kraft i et randpunkt m er givet som

$$f_m = \sum \mathbf{f}'_{m,n}$$

Hvor der summeres over alle de links, der går til randpunktet m (bemærk at der godt kan være flere links mellem to punkter).

$T_{m,n}$ er givet som en sum af en aktiv og en passiv del,

$$T = T_p + T_a$$

hvor indices for randpunkter er underforstået og

$$T_p = \begin{cases} S_p(L - L_p^0) & \text{for } L \geq L_p^0 \\ 0 & \text{for } L < L_p^0 \end{cases}$$

og

$$T_a = \begin{cases} S_a(L - L_a(t)) & \text{for } L \geq L_a(t) \\ 0 & \text{for } L < L_a(t) \end{cases}$$

hvor $L = |\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_m|$. L_p er en fast længde for det enkelte link, svarende til længden af elementet i afslappet tilstand, og $L_a(t)$ er en tidsvariabel længde for det enkelte link. S_p og S_a er stivhedskoefficienter for henholdsvis den passive og aktive del af linket.

For hvert af de aktive links er der altså en tidsafhængig funktion, som beskriver længden af linket. Det er denne funktion, som modellerer den tidsafhængige sammentrækning af hjertet.

Kilder og dræn

Strømningshastighedsfordelingen er diskret givet ved den kontinuerte fordeling evalueret i de diskrete gitterpunkter.

Den diskrete formulering af kravet fra ligning 2.2.4 er at

$$0 = \sum_{i,j} \psi(\mathbf{x}_{i,j})h^2 = Q_{ex}^n + \sum_{k=1}^{2} Q_k^n$$

hvor $\mathbf{x}_{i,j} = (ih, jh)$, Q_k^n er strømningshastigheden til tiden $n\Delta t$ ved den k'te kilde og den venstre sum er over alle gitterpunkter. Nummereringen af kilder er som beskrevet i ligning 2.2.3 og ψ er givet ved ligning 2.2.5.

Diskretisering af den styrende ligning for windkesselmodellen

Differentialligningen som styrer modstandstrykket ved aortakilden (ligning 2.2.9) diskretiseres på følgende måde

$$-Q_2^n = C\frac{P^n_{\text{ref,aorta}} - P^{n-1}_{\text{ref,aorta}}}{\Delta t} + \frac{P^n_{\text{ref,aorta}}}{R_{\text{aorta},2}}$$

Denne ligning giver sammen med den diskrete version af ligning 2.2.8 en diskret beskrivelse af windkesselmodellen. Denne diskretisering er operationel da det er muligt at finde et udtryk for strømningshastigheden for aortadrænet Q_2^n givet ved trykket ved aorta P_2^n og referencetrykket til foregående tidsskridt, $P^{n-1}_{\text{ref,aorta}}$. Trykket, $P^n_{\text{ref,aorta}}$, til nuværende tidsskridt kan derefter findes, når det endelige tryk i modellen er fundet.

Diskretisering af Navier-Stokes ligning

I dette afsnit ses på den diskrete version af Navier-Stokes ligning[15]. Denne tilnærmelse har den egenskab, at det er muligt at finde hastighedsfeltet og trykket til tiden $n+1$ ud fra hastighedsfelt, tryk og kraftfelt til tiden n.

I diskretiseringen indfører man forskellige tilnærmelser til det endelige hastighedsfelt $\mathbf{u}^{n+1}$, disse navngives $\mathbf{u}^{n+1,0}$, $\mathbf{u}^{n+1,2}$ og $\mathbf{u}^{n+1,2}$.

Ligningssystemet ser således ud

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1,0} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}\right) &= \mathbf{F}^n && (2.4.8)\\
\rho\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1,1} - \mathbf{u}^{n+1,0}}{\Delta t} + u_1^n D_1^0 \mathbf{u}^{n+1,1}\right) &= \mu D_1^+ D_1^- \mathbf{u}^{n+1,1} && (2.4.9)\\
\rho\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1,2} - \mathbf{u}^{n+1,1}}{\Delta t} + u_2^n D_2^0 \mathbf{u}^{n+1,2}\right) &= \mu D_2^+ D_2^- \mathbf{u}^{n+1,2} && (2.4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1,2}}{\Delta t}\right) + \mathbf{D}p^{n+1} &= 0 && (2.4.11)\\
\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}^{n+1} &= \psi^n(p^{n+1}) && (2.4.12)
\end{aligned}$$

hvor afhængigheden af sted er underforstået, og hvor $\mathbf{u}^n = (u_1^n, u_2^n)$.

[15]Der er tale om en diskretisering af den originale version af Navier-Stokes ligning.

$\psi^n(p^{n+1})$ svare til den i ligning 2.2.5 beskrevne funktion, men hvor det udnyttes, at strømningshastighederne er en funktion af trykket, og hvor man dermed skelner mellem positionens og trykkets tidsafhængighed. I beregning af den indgående størrelse $\psi^n(p^{n+1})$ benytter man altså trykke fra tidskridtet $n+1$, men benytter kildernes position til tiden n

Af ligning 2.4.8 ses det, at måden F^n indgår i løsningen på er

$$\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n + \Delta t \frac{\mathbf{F}^n}{\rho} \tag{2.4.13}$$

Vi vil ikke gå i nærmere detaljer med løsningen af ligningssystemet ovenfor, idet vi er i stand til at modificere modellen på det ønskede punkt uden at ændre væsentligt i løsningsalgoritmen (se afsnit 5.1.1). Vi vil dog kort beskrive den grundlæggende struktur i løsningsmetoden[16].

Hvis ligning 2.4.12 erstattes med $\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ kan ligningssystemet løses ved hjælp af såkaldte Chorins projektionsmetode [17] .

Det første skridt i denne metode er at finde et hastighedsfelt $\mathbf{u}^{n+1,2}$, på baggrund af ligning 2.4.8 til 2.4.10.

Man kan generelt vise, at et vektorfelt kan deles op i et divergensfrit felt og et rotationsfrit felt. Således kan $\mathbf{u}^{n+1,2}$ selvfølgelig også deles op på denne facon. Pointen i projektionsmetoden er at finde den divergensfri del af $\mathbf{u}^{n+1,2}$. Dette felt findes som $\mathbf{u}^{n+1}$ i ligningssystemet

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1,2}}{\Delta t} \right) + \mathbf{D}p^{n+1} = 0 \tag{2.4.14}$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \tag{2.4.15}$$

Man løser først følgende diskrete Poissonligning med hensyn til p^{n+1}

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1,2} \tag{2.4.16}$$

Ud fra denne løsning beregnes

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,2} - \frac{\Delta t}{\rho} \mathbf{D}p^{n+1} \tag{2.4.17}$$

som trivielt er en løsning til ligning 2.4.14, da den er en omskrivning af denne. At den endvidere er en løsning til ligning 2.4.15 ses ved at tage den diskrete divergens på begge sider

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1,2} - \frac{\Delta t}{\rho} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}p^{n+1}$$

[16]Hvis man ønsker at se en grundig og mere operationel gennemgang af løsningsmetoden, findes dette for eksempel i Thorup [1997].

[17]En lille historisk pudsighed er, at C. Peskin lærte hydrodynamik af A. Chorin, som har udviklet metoden. [Eklund, 1994]

og indsætte ligning 2.4.16 således at man får

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1,2} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1,2} = 0$$

Divergensfrie og rotationsfrie felter står vinkelret på hinanden i den forstand, at et vektorfelt ikke kan være begge dele uden at være nul overalt. Derfor kaldes beregningen fra $\mathbf{u}^{n+1,2}$ til $\mathbf{u}^{n+1}$ *projektion* ned på mængden af divergensfri felter, (hvilket selvfølgelig er forklaringen på, at metoden hedder projektionsmetoden).

I det faktiske sæt ligninger i Peskins 2D-hjertemodel er divergensen af hastighedsfeltet som bekendt ikke nul overalt. Dette gør, at man er nødt til at ændre på metoden. Divergensligningen er som beskrevet i ligning 2.4.12

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \psi^n(p^{n+1})$$

og det betyder at man i stedet for ligning 2.4.16 løser

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \psi^n(p^{n+1}) \right)$$

I praksis løses Poissonligningen først med divergensen lig nul (ligning 2.4.16). Derefter bliver der løst en tilsvarende ligning for hver af de interne kilder, da den eksterne kilde er styret af de interne kilder bliver der i beregningen også taget højde for denne, det samlede tryk findes som en passende sum af disse løsninger.

3 Impuls

Som det fremgår indledningsvis i rapporten, er det, vi har beskæftiget os med spørgsmålet om, hvorvidt det er den "rigtige" Navier-Stokes ligning, der benyttes i Peskins 2D-hjertemodel. Baggrunden for interessen i dette problem falder som tidligere nævnt i to dele. Interessen bunder dels i, at valget af Navier-Stokes ligning ikke oprindeligt er blevet tænkt igennem, dels i en tese om at nogle af problemerne med modellens resultater kan forklares, med at der bør anvendes en anden Navier-Stokes ligning. Formålet med dette kapitel er at skabe forudsætninger for at diskutere valget af Navier-Stokes ligning og betydningen af dette valg.

Indledningsvis belyses det, hvorfor man ikke uden videre kan bruge standard Navier-Stokes ligningen for inkompressible væsker til at beskrive blodets strømning i en model, hvor man har kilder og dræn. Dernæst vil vi gennemgå, hvordan Peskin har forestillet sig, at man skulle opstille et korrekt sæt ligninger. Det vil sige, at der udledes en Navier-Stokes ligning på baggrund af de forudsætninger Peskin har opstillet. Resultatet af denne beregning er en Navier-Stokes ligning, der er modificeret i forhold til den standardligning, der oprindeligt indgår i Peskins 2D-hjertemodel. I vores arbejde med problemet er vi imidlertid nået frem til, at man med et andet sæt forudsætninger, end dem Peskin vælger, kan nå frem til det sæt ligninger, der oprindeligt blev valgt til Peskins 2D-hjertemodel. Dette resultat præsenteres umiddelbart efter udledningen af den modificerede ligning.

Som afslutning på dette kapitel vil vi give et bud på, hvordan forskellen mellem de to sæt forudsætninger kan tolkes fysisk.

I dette kapitel arbejdes der med en todimensional beskrivelse, som kan ses direkte i forlængelse af den kontinuerte formulering af Peskins 2D-hjertemodel i afsnit 2.2. Den todimensionale beskrivelse giver desværre anledning til nogle lidt kunstige formuleringer, men da der har vist sig at være en enkelt og central forskel på resultatet i henholdsvis to og tre dimensioner, har vi vurderet, at det trods alt giver den klareste og mest konsistente fremstilling.

I dette og næste kapitel benytter vi Einsteins summationskonvention[1]. Afhængigheden af tid og sted er underforstået, og fodtegn angiver hvilken komposant (henholdsvis første og andenkomposanten) af den indgående størrelse, der er tale om. For eksempel er u_1 hastighedens komposant i førsteaksens retning.

[1]Se appendiks B for en kort introduktion til denne konvention.

3.1 Kontinuitetsligningen og problemet

Formålet med dette afsnit er at vise hvorledes diskussionen omkring Navier-Stokes ligningen hænger tæt sammen med den kontinuitetsligning der anvendes. Derfor indledes med en lille udledning af kontinuitetsligningen for et system, svarende til det, der beskrives i Peskins 2D-hjertemodel.

I modellen, antages det at væsken er homogen og inkompressibel, altså gælder det for alle $\mathbf{x}$ og t at

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kilder og dræn i modellen er som beskrevet i afsnit 2.2.3 beskrevet ved en fordeling $\psi(\mathbf{x}, t)$. ψ's værdi i et givet punkt angiver mængden af væske, der indkommer/forsvinder pr. sekund pr. areal. Mængden af væske er målt i areal, hvilket betyder at ψ er af dimension "pr. tid". Integreres ψ over et areal er resultatet en indstrømningshastighed[2] altså en størrelse med dimension "areal pr. tid". I de punkter/områder, hvor ψ er positiv beskriver den, at væske strømmer ind, og tilsvarende beskriver negativt ψ, at væske strømmer ud.

Da væsken er inkompressibel, vil massen af væsken indenfor et fast areal A i modellen være konstant. Det vil sige

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

hvor M er massen af væsken indenfor arealet A.

Hvis A er indeholdt i den lukkede rand l, kan der komme masse ind og ud af A på to måder. Enten kan det ske ved en masseflux gennem overfladen eller ved, at der indkommer/fjernes væske ved kilde og dræn. Heraf følger

$$\frac{dM}{dt} = 0 = \int_A \rho\, \psi \, dA - \int_l \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl$$

Hvor $\mathbf{n}$ er en enhedsnormal, der har positiv retning ud af arealet. Ved at anvende divergensteoremet på sidste led fås

$$0 = \int_A \rho\, \psi - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \, dA$$

Ligningen gælder uafhængigt af valget af A, hvilket betyder[3]

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\, \psi - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \Leftrightarrow \\ \psi &= \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Heraf ses det, at i den situation man har i Peskins 2D-hjertemodel, altså for en inkompressibel væske med rumligt fordelt kilder, er hastighedsfeltets divergens lig med kildedrænfordelingen. Uden denne ligning ville der ikke kunne

[2]Hvor indstrømning skal forstås som en størrelse, der kan være negativ.

[3]Det er en forudsætning at integranden er kontinuert, hvilket vi antager her såvel som senere.

komme blod ind og ud af hjertet. Derfor indgår ligning 3.1.1 også som en grundlæggende del af modellen (jvf. afsnit 2.2.6 og 2.4.3).

Problemet er imidlertid, at en af de forudsætninger, som indgår i standardudledningen af den Navier-Stokes ligning, der bruges sammen med ligning 3.1.1 i Peskins 2D-hjertemodel er, at kontinuitetsligningen har formen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Der er altså ikke umiddelbart sammenhæng mellem den anvendte kontinuitetsligning og den anvendte Navier-Stokes ligning.

Som beskrevet i indledningen indgår der ikke nogen argumentation for valget af Navier-Stokes ligning i Peskins oprindelige arbejde med modellen. Navier-Stokes ligning bruges blot som et standardresultat fra hydrodynamikken, derfor er der tilsyneladende ikke taget hensyn til kilder og dræns betydning for impulsregnskabet. I modellens oprindelige form indgår kilder og dræn altså i de overvejelser, man gør sig om massebevarelse, mens der ikke explicit tages højde for kilder og dræn i overvejelserne om impulsbevarelse. Dette er netop det grundlæggende problem for modellen.

3.2 Den modificerede Navier-Stokes ligning

Et af udgangspunkterne for vores arbejde med dette projekt har, som beskrevet i indledningen, været en upubliceret note, "Inkompressible fluid dynamics with distributed sources and sinks" [Peskin, 1998]. I denne behandler Peskin et system med fordelte kilder og dræn i en helt generel ramme. Det vil sige, at Peskin ikke refererer direkte til hjertemodellen i denne note.

Det følgende er skrevet på baggrund af ovennævnte note. Vi har imidlertid foldet mellemregninger og kommentarer væsentligt ud. Desuden er Peskins beskrivelse i modsætning til den følgende baseret på et tredimensionalt system, hvor vi arbejder med et todimensionalt system. Det betyder selvfølgelig et ændret sprogbrug, men som tidligere nævnt, giver det også et lidt forskelligt resultat.

3.2.1 Forudsætninger

Generelle forudsætninger

Som vist i afsnit 3.1 er det en forudsætning for at kunne beskrive et system med kilder og dræn, at kontinuitetsligningen har følgende form

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \psi$$

Dernæst antages det, at spændingstensoren har standardformen[4]

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij} \right) \tag{3.2.1}$$

I en almindelig tredimensional beskrivelse beskriver spændingstensoren overfladekraften i væsken. Således giver $T_{ij}n_j$ den i-te komposant af den kraft pr. areal, der virker på en overflade med $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ som enhedsnormal. I to dimensioner beskriver tensoren altså en "randkraft" og $T_{ij}n_j$ giver den i-te komposant af kraften pr. længde på et linjestykke med $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ som normal.

Antagelser vedrørende impulsen ved kilder og dræn

Det springende punkt i denne udledning er valget af antagelser om impulsen ved kilder og dræn. I Peskin [1998] og dermed i dette afsnit antages det, at den væske, der strømmer ind i domænet, har impuls nul. Væsken får altså kun en hastighed forskellig fra nul, fordi den påvirkes af den væske, der allerede eksisterer i systemet. Når væske forlader domænet, antages det derimod, at den væske, der forsvinder, tager sin impuls med sig ud af systemet.

Da det med disse antagelser er praktisk at kunne beskrive indstrømning og udstrømning hver for sig defineres

$$\psi^+ = \begin{cases} \psi & \text{hvis } \psi > 0 \\ 0 & \text{hvis } \psi \leq 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

der beskriver fordelingen af områder, hvor der strømmer væske ind i domænet gennem kilder, og tilsvarende

$$\psi^- = \begin{cases} \psi & \text{hvis } \psi < 0 \\ 0 & \text{hvis } \psi \geq 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

der beskriver fordelingen af områder, hvor der strømmer væske ud gennem dræn. Med udgangspunkt i disse definitioner kan ændringen af impuls, i den i-te retning, hidrørende fra kilder og dræn beskrives ved

$$\int_A u_i \rho\, \psi^- \, dA$$

hvor A er et fast areal.

[4] Det er i spændingstensoren, at den omtalte dimensionsafhængighed optræder. For en udledning af spændingstensoren se for eksempel Batchelor [1967] afsnit 1.3 og 3.3

3.2.2 Bevægelsesligningen

Som ved udledningen af kontinuitetsligningen (afsnit 3.1) tages der udgangspunkt i et fast areal A, der er indeholdt i den lukkede rand l. Her betragtes ændringen af impuls i den i'te retning pr. tid

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{d}{dt}\int_A u_i\rho \, dA = \int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t} \, dA$$

Impulsændringen kan skyldes, at væsken påvirkes af rand- [5] og arealkræfter, den kan stamme fra den væske, der strømmer gennem randen, og endelig kan den hidrøre fra væske som strømmer ud af A gennem dræn. Dette giver følgende sammenhæng

$$\int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t} \, dA = \int_l T_{ij} n_j \, dl + \int_A F_i dA - \int_l u_i \rho \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl + \int_A u_i \rho \psi^- \, dA \quad (3.2.4)$$

Ved at anvende divergensteoremet ved de to randintegraler fås

$$\int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t} \, dA = \int_A \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i - \nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) + u_i \rho \psi^- \, dA \Leftrightarrow$$
$$\int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - F_i + \nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) - u_i \rho \psi^- \, dA = 0$$

Da arealet A er valgt vilkårligt, gælder udtrykket uafhængigt af valget af område, hvilket betyder at

$$\frac{\partial u_i \rho}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - F_i + \nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) - u_i \rho \psi^- = 0 \quad (3.2.5)$$

Her gælder det (jvf. ligning 3.2.1) at

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij}\right)\right)$$

Hvilket man med fordel kan regne lidt på

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij}\right)\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i}\right) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\nabla^2 u_i + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i} - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i}\right) \\
&= \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Ved indsættelse i ligning 3.2.5 giver det

$$\frac{\partial u_i \rho}{\partial t} - \left(\mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) - F_i + \nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) - u_i \rho \psi^- = 0 \quad (3.2.6)$$

[5] Randkræfter skal her ikke forstås som noget, der har med hjerteranden at gøre, men er den føromtalte todimensionale analog til overfladekræfter.

Divergensen af $u_i\rho\mathbf{u}$ skrives ud ifølge produktreglen

$$\nabla \cdot (u_i\rho\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\rho + u_i\rho\nabla\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\rho + u_i\rho\psi$$

hvilket indsættes og giver

$$\frac{\partial u_i\rho}{\partial t} - \mu\nabla^2 u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\rho + u_i\rho\psi - u_i\rho\psi^- = 0 \qquad (3.2.7)$$

Bemærk endvidere at der gælder følgende

$$\psi - \psi^- = \psi^+$$

Hermed fås

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i\rho}{\partial t} - \mu\nabla^2 u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\rho + u_i\rho\psi^+ = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\right) = \mu\nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i - \rho u_i\psi^+ & \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

Denne ligning er en version af Navier-Stokes ligning, og for at finde et hastighedsfelt og et trykfelt skal den benyttes sammen med kontinuitetsligningen

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \psi$$

Dette sæt ligninger er ikke standard, idet man normalt enten arbejder med totalt inkompressible systemer, og dermed har $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, eller alternativt arbejder med systemer, hvor væsken er sammentrykkelig og dermed har en densitet, som afhænger af tid og sted. Her indgår divergensen af hastighedsfeltet i Navier-Stokes ligningen, og den er forskellig fra nul, men samtidig antages det, at væsken er usammentrykkelig.

I de følgende kapitler omtales ligning 3.2.8 som "den modificerede Navier-Stokes ligning".

3.3 Den originale Navier-Stokes ligning

I foregående afsnit blev der på baggrund af Peskin [1998] udledt et sæt ligninger, der kan implementeres i løsningen af Peskins 2D-hjertemodel, hvilket vil blive beskrevet i afsnit 5.1.1. I dette afsnit analyserer vi betydningen af det sæt ligninger, der indgår i modellens originale formulering, altså

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i\right) &= \mu\nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i \qquad (3.3.1)\\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= \psi\end{aligned}$$

Som nævnt tidligere er vi nået frem til, at der kan sættes et sæt fornuftige forudsætninger op, som giver netop dette sæt ligninger. Vi er nået frem til disse forudsætninger ved at betragte ligning 3.2.7 og spørge os selv, om vi ikke med et andet udgangspunkt kunne få de to sidste led til at gå helt ud. Det vil altså sige, at metoden var at regne baglæns til de forudsætninger, der svarer til det sæt ligninger, der anvendes i Peskins 2D-hjertemodel. I det følgende præsenteres resultatet af disse betragtninger. Strukturen i udledningen er den samme som i foregående afsnit, og derfor præsenteres den her i en noget kortere form.

3.3.1 Forudsætninger

De generelle forudsætninger er ikke overraskende de samme som i afsnit 3.2.1. Ved drænområder, det vil sige områder, hvor $\psi < 0$, er antagelsen også den samme som i 3.2.1, idet det antages, at den væske, der forsvinder, tager sin impuls med sig ud af systemet. Forskellen ligger altså udelukkende ved kildeområder, hvor det nu antages, at den væske, der kommer ind i domænet, har samme hastighed som den omgivende væske i domænet.

Det vil sige, at der er symmetri i den antagelse, man har ved henholdsvis kilder og dræn. Ændringen af impuls hidrørende fra kilder og dræn kan med disse forudsætninger beskrives ved

$$\int_A u_i \rho \, \psi \, dA$$

hvor A er et fast volumen.

3.3.2 Bevægelsesligningen

Med de netop beskrevne forudsætninger bliver ændringen af impuls for et fast areal A omgivet af den lukkede rand l

$$\int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t} \, dA = \int_l T_{ij} n_j \, dl + \int_A F_i dA - \int_l u_i \rho \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl + \int_A u_i \rho \psi \, dA$$

Denne ligning svarer til ligning 3.2.4 i afsnit 3.2.2. Ved omskrivninger og argumenter svarende til dem, der førte frem til ligning 3.2.6, fås

$$\frac{\partial u_i \rho}{\partial t} - \left(\mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - F_i + \nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) - u_i \rho \psi = 0 \tag{3.3.2}$$

Divergensen af $u_i \rho \mathbf{u}$ skrives igen ud ifølge produktreglen

$$\nabla \cdot (u_i \rho \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \rho + u_i \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \rho + u_i \rho \psi$$

hvilket indsættes i ligning 3.3.2 og giver

$$\frac{\partial u_i \rho}{\partial t} - \mu \nabla^2 u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \rho + u_i \rho \psi - u_i \rho \psi = 0$$

Hvor de to sidste led netop går ud med hinanden, således at ligningen i reduceret form bliver til den ønskede almindelige Navier-Stokes ligning for usammentrykkelige væsker. Det vil sige, at vi er nået frem til det i ligning 3.3.1

beskrevne sæt af ligninger, altså den originale Navier-Stokes ligning og en kontinuitetsligning som er $\nabla \cdot \mathbf{u} = \psi$.

Med denne udledning har vi fået en mulighed for at vurdere, hvilken situation den originale version af Peskins 2D-hjertemodel beskriver. Idet vi med det opsatte sæt forudsætninger har skabt en teoretisk ramme, som forklarer, hvordan man kommer frem til den originale formulering af modellen.

3.4 Deldiskussion

På baggrund af de udledte forudsætninger kan vi altså afkræfte, at der direkte er en matematisk eller fysisk inkonsistens i den originale formulering af modellen. Der *bliver* taget højde for impulsændringerne i systemet i forbindelse med kilder og dræn.

Det er dog på ingen måde afklaret, om der er en sammenhæng mellem de praktiske problemer med modellen, og hvilke forudsætninger man vælger. Endvidere er det ikke afklaret, hvilke generelle forskelle der er på de to sæt af forudsætninger.

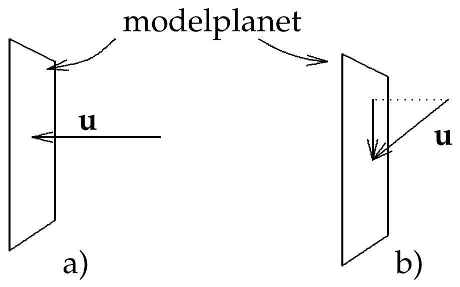
Da vi med de udledte forudsætninger har en teoretisk ramme at diskutere den originale model i, er vi i stand til at give en generel beskrivelse af forskellene mellem de to versioner af modellen, hvilket ikke tidligere var muligt. Derfor vil vi gennem resten af denne rapport analysere modellen i dette lys og på denne baggrund sige noget om, hvilke konsekvenser det teoretisk og praktisk har at vælge det ene eller andet sæt ligninger.

I resten af dette afsnit belyses det, hvordan de to sæt ligninger skal tolkes fysisk. Dette sker for det første for at godtgøre, at begge sæt forudsætninger er meningsfyldte i en fysisk forstand. Desuden skal denne diskussion ses som en del af baggrunden for den senere diskussion af, om der er grundlag for at sige, at man bør anvende den modificerede Navier-Stokes ligning i stedet for den originale.

Det er, som beskrevet en forskel i antagelserne angående impulsen af den væske der kommer ind i systemet, der fører til de to forskellige versioner af Navier-Stokes ligning. Det er derfor disse antagelser, der skal fortolkes.

Udgangspunktet for den modificerede Navier-Stokes ligning er, at den væske, der kommer ind i domænet ikke har nogen impuls. Det vil altså sige, at væsken ikke har nogen hastighed, når den kommer ind i systemet. Man kan forestille sig denne situation, som om væsken dannes ved selve kilden med hastighed nul.

Et alternativt forestillingsbillede, der kan bruges i forbindelse med antagelsen om, at den indkommende væske har impuls nul, er, at væsken kommer ind vinkelret på det plan, som modellen beskriver, sådan som det er antydet i figur 3.1 a. Hastigheden vinkelret på planet giver selvfølgelig også anledning til en impuls. Det betyder, at væsken skal afgive sin impuls i denne retning til noget, der er uden for det modellerede system, inden den indgår i modellens beskrivelse. Det mest oplagte er at forestille sig en slags bagvæg, hvor væsken stoppes og dermed afgiver sin impuls i den retning.



Figur 3.1 a) Skitse af hvordan man kan forestille sig væskens inflow, når den kommer ind i modellen uden impuls. b) Skitse af hvordan man kan forestille sig væskens inflow, når den kommer ind i modellen med impuls.

Under alle omstændigheder er konsekvensen af de antagelser, som svarer til den modificerede Navier-Stokes ligning, at den indkommende væske kun får en hastighed, fordi den påvirkes af den omgivende væske. Dette sker efter, at den er kommet ind i modellen. Det vil sige, at væsken støder sammen med den væske, der i forvejen er i modellen, og modtager impuls i denne proces. I slutningen af afsnit 4.3 kommer vi lidt nærmere ind på konsekvensen af denne forestilling om stød og impulsudveksling.

I udledningen, som fører til den originale Navier-Stokes ligning, antages det, at væsken, når den kommer ind i domænet, har samme hastighed som den omgivende væske. På figur 3.1 b er der skitseret, hvordan man her kan forestille sig, at væsken kommer skråt ind på det plan, som modellen beskriver. For at analysere dette billede, kan man dele hastigheden af væsken lige uden for modellens plan op i to komposanter. En komposant i modellens plan og en komposant vinkelret på modellens plan. Den komposant, der er i modellens plan, vil så kunne svare til væskens hastighed i modellen. Impulsen hidrørende fra den vinkelrette komposant vil imidlertid, på sammen måde som før beskrevet, skulle afgives, inden væsken indgår i modellen. Jo mere "skråt" man forestiller sig, væsken kommer ind mod modelplanet, jo mindre en del af væskens impuls vil skulle afgives. Det vil sige, at antagelsen om, at væsken kommer ind med samme hastighed som den omgivende væske, vil blive bedre og bedre.

Det er på sin vis farligt at søge at forklare mekanismerne i den todimensionale model ud fra en tredimensionel fysisk forståelse. Det todimensionale system i modellen behandles jo netop som en helhed, der ikke vekselvirker med den tredje dimension. Ved kilder og dræn vekselvirker systemet imidlertid med ikke nærmere bestemte omgivelser. Derfor mener vi, at man godt kan bruge de overvejelser, vi har gjort os, når blot man holder sig for øje, at der ikke er tale om en formaliseret forståelse af situationen, men blot en måde at fortolke forudsætninger på.

Det er oplagt, at der er nogle situationer, hvor den ene beskrivelse er bedre end den anden. Betragtes en underjordisk kilde i en bæk, hvis strømningsmønster modelleres i to dimensioner, er det oplagt at forestille sig, at væsken kommer ind i systemet uden en hastighed i modelplanet. Afgivelsen af den lodrette og dermed vinkelrette impuls kan forklares med, at tyngdekraften arbejder på vandet og dermed stopper den opadgående bevægelse. Endvidere vil den lodrette hastighed sikkert også være lille i forhold til de hastigheder, der er i bækken.

Forestiller man sig i stedet et rør, som er parallelt med vandets hastighed, vil det omvendt være rimeligt at antage, at væsken forlader dette rør med en hastighed i modellens plan. Det er dog ikke nødvendigvis sikkert, at væsken har samme hastighed som den omgivende væske, men det er en mulighed.

4 Kinetisk energi

I foregående kapitel viste vi, at man kan opstille et sæt af forudsætninger, der er konsistente med Peskins 2D-hjertemodel og fører frem til den originale formulering af Navier-Stokes ligning. Det giver derfor mening at analysere energiforholdene i forbindelse med såvel den originale som den modificerede Navier-Stokes ligning. Som omtalt i indledningen har Peskin udført energiberegningerne for den modificerede Navier-Stokes ligning, men tilsyneladende[1] ikke for den originale Navier-Stokes ligning.

I dette kapitel beregnes ændringen af den kinetiske energi i systemet med udgangspunkt i henholdsvis den modificerede og den almindelige Navier-Stokes ligning. Der er to formål med denne gennemgang. Dels giver energiudtrykkene i sig selv endnu et udgangspunkt for at diskutere, hvordan man skal forstå forskellen mellem de forudsætninger (jvf. afsnit 3.2.1, 3.3.1 og 3.4), der fører frem til de to versioner af Navier-Stokes ligningen. Dels giver energiberegningerne mulighed for en mere kompakt repræsentation af de data, vi får ved kørsler med modellen. Den kinetiske energi giver os nemlig ét tal, der siger noget om det samlede systems tilstand ved hvert tidsskridt.

For at kunne anvende energiberegningen i databehandlingen er det nødvendigt at diskretisere de indgående beregninger. Denne diskretisering er kort beskrevet i afsnit 5.1.2. Dette kapitel er derfor udelukkende koncentreret om den kontinuerte beskrivelse. Kapitlet afsluttes med en diskussion af, hvordan de forskellige led i energiændringsudtrykket skal tolkes. Dette sker naturligvis med særlig fokus på forskellene mellem resultatet for henholdsvis den modificerede og den originale Navier-Stokes ligning.

Energiberegningerne er lavet med udgangspunkt i den metode Peskin anvender i Peskin [1998]. Beregningerne knytter sig ikke nødvendigvis direkte til den konkrete model. Det udnyttes imidlertid hyppigt, at der er periodiske randbetingelser og at domænet er rektangulært, jvf. afsnit 2.2.1, hvilket altså er en grundlæggende antagelse for det følgende.

Der anvendes lidt vekslende notation ved integration.

$$\int_\Omega \quad dA = \int_0^H \int_0^H \quad dx_1 dx_2$$

Ω er det kvadratiske domæne[2] og H er som normalt domænebredden. Den

[1] I hvert fald har vi ikke haft umiddelbar adgang til en sådan beregning.

[2] Der er dog intet i beregningerne, der afhænger af at domænebredde og højde er ens.

kortere notation til venstre bruges, hvis integrationen ikke udføres i praksis, mens den højre benyttes, når man har behov for at udnytte grænserne.

4.1 Den modificerede Navier-Stokes ligning

Med udgangspunkt i den modificerede Navier-Stokes ligning[3] (jvf. ligning 3.2.8)

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i + F_i + \mu\nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i\rho\psi^+ \tag{4.1.1}$$

ses der nu på ændringen af den kinetiske energi i hele domænet. For at gøre dette betragtes ligningens venstre side.

Dette led ganges med u_i, og der summeres over i (hvilket er underforstået ifølge summationskonventionen)

$$\rho u_i\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial(u_i u_i)}{\partial t} = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial|\mathbf{u}|^2}{\partial t}$$

Det ses, at det netop giver ændringen i den kinetiske energi pr. tid pr. areal, og ved at integrere op over hele domænet fås derfor den samlede ændring i kinetisk energi pr. tid. Hvis den kinetisk energi for hele systemet benævnes K, vil det altså sige, at

$$\frac{dK}{dt} = \int_\Omega \rho u_i\frac{\partial u_i}{\partial t}\,dA$$

Det er derfor oplagt at udføre disse operationer på alle leddene i ligning 4.1.1. Forinden laves en række omskrivninger, som senere viser sig at være praktiske.

Først et par observationer.

Det ses, at

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i = u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{4.1.2}$$

og at

$$\frac{1}{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2}u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2}u_i\psi \tag{4.1.3}$$

Ligning 4.1.3 indsættes i ligning 4.1.2, som derefter indsættes i ligning 4.1.1, hvilket giver

[3] Hvor ψ^+ er defineret i ligning 3.2.2.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} =$$
$$- \rho \left(\frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2} u_i \psi \right) + F_i + \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i \rho \psi^+ \quad (4.1.4)$$

Det gælder endvidere, at

$$- \psi^+ + {}^1\!/_2 \psi = - \begin{cases} \psi & \text{hvis } \psi > 0 \\ 0 & \text{hvis } \psi \leq 0 \end{cases} + {}^1\!/_2 \begin{cases} \psi & \text{hvis } \psi > 0 \\ \psi & \text{hvis } \psi \leq 0 \end{cases} =$$
$$- \begin{cases} {}^1\!/_2 \psi & \text{hvis } \psi > 0 \\ -{}^1\!/_2 \psi & \text{hvis } \psi \leq 0 \end{cases} = -{}^1\!/_2 |\psi|$$

hvilket indsættes i ligning 4.1.4, og medfører

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + F_i + \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} u_i \rho |\psi| \quad (4.1.5)$$

Ligning 4.1.5 er nu på en fordelagtig form, og som før beskrevet, ganges der nu med u_i, summeres over i samt integreres over hele domænet. Dette giver følgende ligning

$$\int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \, dV = \int_\Omega \left(-\rho \frac{1}{2} u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \frac{1}{2} u_i \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \right.$$
$$\left. u_i F_i + \mu u_i \nabla^2 u_i - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} u_i u_i \rho |\psi| \right) \, dV \quad (4.1.6)$$

Omskrivningen af denne ligning er en anelse omstændelig, og derfor behandles ledene lidt ad gangen

Følgende omskrivning skal bruges

$$\frac{\partial (u_j u_i) u_i}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} + u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

det vil sige, at de første to led på højresiden af ligning 4.1.6 (hvor diverse konstanter for overskuelighedens skyld er fjernet) kan omskrives på følgende måde

$$\int_0^H \int_0^H \left(u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^H \int_0^H \frac{\partial (u_j u_i) u_i}{\partial x_j} \, dx_1 \, dx_2$$

Ved passende ombytning af integrationsrækkefølgen kan den inderste del af integrationen for hvert led i summen over j bringes på følgende form (hvor der ikke summeres over k, jvf. appendiks B)

$$\int_0^H \frac{\partial(u_k u_i)u_i}{\partial x_k}\,dx_k = \Big[(u_k u_i)u_i\Big]_0^H = 0$$

hvor det sidste lighedstegn skyldes periodiciteten af ledet $(u_j u_i)u_i$.

Det vil sige, at

$$\int_0^H \int_0^H \left(u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) dx_1\,dx_2 = 0 \tag{4.1.7}$$

Betragt nu ledet

$$\int_0^H \int_0^H u_i \nabla^2 u_i\,dx_1\,dx_2 = \int_0^H \int_0^H u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\,dx_1\,dx_2$$

Den inderste del af integrationen for hvert led i summen over j kan ved ombytning af integrationsrækkefølgen bringes på følgende form (hvor der ikke summeres over k)

$$\int_0^H u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\,dx_k = \left[u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]_0^H - \int_0^H \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,dx_k$$

Hvor følgende gælder på grund af periodiciteten af hastighedsfeltet

$$\left[u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]_0^H = 0$$

det vil alt i alt sige, at

$$\int_0^H \int_0^H u_i \nabla^2 u_i\,dx_1\,dx_2 = -\int_0^H \int_0^H \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx_1\,dx_2 \tag{4.1.8}$$

Som det sidste led betragtes nu

$$\int_0^H \int_0^H u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\,dx_1\,dx_2$$

for hvert led i summen over i kan integrationsrækkefølgen atter engang arrangeres, således at den inderste integration kommer på følgende form (hvor der som før ikke summeres over k)

$$\int_0^H u_k \frac{\partial p}{\partial x_k}\,dx_k = \Big[u_k p\Big]_0^H - \int_0^H p \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\,dx_k$$

Af periodiciteten fås at

$$\Big[u_k p\Big]_0^H = 0$$

hvilket alt i alt giver

$$\int_0^H \int_0^H u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 = \\ -\int_0^H \int_0^H p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 = -\int_0^H \int_0^H p\psi\, dx_1\, dx_2 \quad (4.1.9)$$

Hvis resultaterne i ligning 4.1.7, 4.1.8 og 4.1.9 indsættes i ligning 4.1.6 fås

$$\frac{dK}{dt} = \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dA = \\ \int_\Omega u_i F_i\, dA - \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dA + \int_\Omega p\psi\, dA - \int_\Omega \frac{1}{2} u_i u_i \rho |\psi|\, dA \quad (4.1.10)$$

Betydningen af disse led behandles i afsnit 4.3. Det vil sige, efter at tilsvarende beregninger for den originale Navier-Stokes ligning er blevet præsenteret.

4.2 Den originale Navier-Stokes ligning

Vi vil nu præsentere en analog beregning for den originale Navier-Stokes ligning.

I det følgende tages udgangspunkt i ligning 3.3.1.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + F_i + \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Da energiberegningen er analog til den, der blev præsenteret i foregående afsnit, præsenteres den i korthed. Først udføres en række omskrivninger af Navier-Stokes ligningen. Disse omskrivninger førte i sidst afsnit frem til ligning 4.1.4. Her giver det imidlertid straks en ligning, der svarer til ligning 4.1.5

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + F_i + \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \rho \psi \quad (4.2.1)$$

Derefter ganges med u_i, summeres over i og integreres over hele domænet. Ved præcis samme regninger som i sidste afsnit får man

$$\frac{dK}{dt} = \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dA =$$
$$\int_\Omega u_i F_i\, dA - \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dA + \int_\Omega p\psi\, dA + \int_\Omega \frac{1}{2} u_i u_i \rho \psi\, dA \quad (4.2.2)$$

Denne ligning afviger fra ligning 4.1.10 på det sidste led. Hvor der før stod

$$-\int_\Omega \frac{1}{2} u_i u_i \rho |\psi| dA$$

står der nu

$$+\int_\Omega \frac{1}{2} u_i u_i \rho \psi dA$$

I næste afsnit går vi dybere ind i en diskussion af, hvilken betydning denne forskel har. Dette sker både i direkte relation til de praktiske problemer med modellen og som en mere generel diskussion af forskellen på de to Navier-Stokes ligninger.

4.3 Deldiskussion

Indledningsvis betragtes de led som er ens i ligning 4.1.10 og 4.2.2. Fortegn angiver, hvordan de optræder i ligningen.

Ledet

$$+\int_\Omega u_i F_i\, dA \quad (4.3.1)$$

giver effekten[4] af det arbejde, som randkraften udfører på væsken. Dette led må forventes at være den største kilde til kinetisk energi i systemet. Dette arbejde kan dog også være negativt, hvis væskens hastighed og kraften overordnet set er modsat rettede.

Ledet hvor viskositeten μ indgår

$$-\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dA \quad (4.3.2)$$

angiver naturligt nok den energi pr. tid, der dissiperes på grund af væskens viskositet. Når dette led, som her, optræder som et integral over hele domænet, kan det ikke tilføre systemet energi[5], hvilket ses ved, at de indgående størrelser alle er positive, mens fortegnet er negativt.

[4] Effekt skal forstås som arbejde pr. tid.

[5] Hvis man, som i udledningen af Navier-Stokes ligning i foregående kapitel, betragter et område i en lukket rand i væsken, kan det viskose led godt tilføre området energi.

Det sidste led, der indgår både i ligning 4.1.10 og ligning 4.2.2, er

$$+\int_{\Omega} p\psi \, dA \tag{4.3.3}$$

Dette led giver effekten af det arbejde, som kilder og dræn udfører på væsken. Ved kilder, det vil sige, hvor $\psi > 0$, udføres et positivt arbejde, og ved dræn udføres et negativt arbejde.

Endelig betragtes det led, som er forskelligt i de to tilfælde. Disse betragtninger relateres til de forudsætninger, som fører til de to forskellige Navier-Stokes ligninger (jvf. afsnit 3.2.1, 3.3.1 og 3.4).

I ligning 4.1.10, det vil sige, i den energiligning, der svarer til den modificerede Navier-Stokes ligning, er det sidste led givet ved

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{2} u_i u_i \rho |\psi| dA \tag{4.3.4}$$

og det tilsvarende led for den originale formulering ser således ud

$$+\int_{\Omega} \frac{1}{2} u_i u_i \rho \psi dA \tag{4.3.5}$$

I begge tilfælde beskriver ledet, hvad der sker med energien, når væsken strømmer ind i eller ud af domænet. Derfor omtaler vi generelt dette led som energistrømmen ved kilder og dræn.

Det ses, at ved dræn, det vil sige for $\psi < 0$, er situationen ens i de to formuleringer. Der forsvinder en energimængde, som svarer til, at den væske, som løber ud af modellen, tager sin kinetiske energi med. Dette svarer jo udmærket til, at det i begge tilfælde forudsættes, at væsken tager sin impuls med sig ud af modellen, og det betyder, at der ikke ophobes energi i forbindelse med drænet.

Ved kilder er der imidlertid en forskel, hvilket også er i overensstemmelse med, at det er her, der er forskel i forudsætningerne. I den originale formulering tilføres en energimængde svarende til den mængde væske, som kommer ind i domænet. Dette stemmer overens med antagelsen om, at væsken, som kommer ind i modellen, har en impuls, som er større end nul.

I den nye formulering, det vil sige den, der svarer til den modificerede Navier-Stokes ligning, kan dette led aldrig give anledning til, at der tilføres energi til systemet. Dette ses umiddelbart af, at alle størrelserne er positive, og fortegnet er negativt. Det vil altså sige, at når væsken kommer ind uden impuls, *forsvinder* der kinetisk energi ud af systemet.

På baggrund af forskellige antagelse har Peskin forsøgt at fortolke, hvordan der kan dissiperes energi ved kilden [Peskin, 1998]. Denne fortolkning gennemgåes i det følgende.

Det antages, at den væskemængde, der kommer ind med hastighed 0, har en væsentlig mindre masse m end den væske, der er i systemet M. Det antages endvidere, at den væske, der er i systemet har hastigheden $\mathbf{v}_1$, samt at den indkommende væske accelereres ved fuldstændig uelastiske stød med væsken i modellen.

Et fuldstændig uelastisk stød er et stød, hvor de sammenstødende parter har samme hastighed efter stødet. Da der endvidere skal være impulsbevarelse, betyder det

$$\mathbf{v}_1 M = \mathbf{v}_2 (M + m) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \left(\frac{M}{M + m} \right)$$

Ændringen af den kinetiske energi i forbindelse med stødet bliver derfor

$$\Delta K = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 \left(\frac{M}{M + m} \right)^2 (M + m) - \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 M \approx -\frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 m$$

hvor tilnærmelsen følger af antagelsen om at $m \ll M$.

Det betyder altså, at antagelsen om, at væsken kommer ind uden impuls, naturligt fører til, at der dissiperes energi ved kilden.

På baggrund af denne energidiskussion kan man konkludere, at der energimæssigt ikke er så stor forskel på de to versioner af modellen, som man kunne have forestillet sig. Det er kun ved kilderne, at der er en forskel. Størrelsen af denne forskel afhænger af væskens hastighed ved kilden, som i hjertemodellen må antages at være meget mindre end hastighederne ved drænet. Det vil altså sige, at man ikke umiddelbart kan forvente den store forskel i kinetisk energi mellem de to versioner af modellen.

5 Databehandling

For at undersøge hvilken praktisk betydning det har for Peskins 2D-hjertemodel, om man vælger den originale eller den modificerede Navier-Stokes ligning, har vi implementeret den modificerede Navier-Stokes ligning i modellen. I dette afsnit vil vi først beskrive diskretiseringen af de ønskede modifikationer og energiberegninger. Derefter foretages selve datapræsentationen og analysen. Først gives en generel præsentation af modellens data og de benyttede repræsentationsmetoder, dernæst følger en analyse af, om vores implementering er numerisk stabil. Selve analysen af betydningen af modifikationen består af en analyse af de generelle forskelle mellem de to versioner af modellen, en analyse af betydningen for problemerne med numerisk stabilitet og til sidst en analyse af indvirkningen på randens bevægelse.

5.1 Implementering af ændringer

Før vi er i stand til at implementere de konkrete ændringer i den diskrete version af modellen, skal de indgående udtryk diskretiseres. Dette vil kort blive beskrevet her, sammen med de overvejelser vi har gjort os om implementeringen af ændringerne.

5.1.1 Implementering af den modificerede Navier-Stokes ligning

Formålet med modifikationen er at det ekstra led, der indgår i den modificerede Navier-Stokes ligning skal indføres i løsningsalgoritmen. Det er oplagt at forsøge at indføre det ekstra led, på samme måde som kraftledet er indført i ligning 2.4.8. Fordelen ved denne metode er først og fremmest, at det er simpelt. I det led der skal indføjes optræder divergensen af hastighedsfeltet i form af $(\psi^n)^+$. Man kan naturligvis finde divergensen direkte ud fra hastighedsfeltet, men da divergensen pr. definition er givet ved ligning 2.2.5 har vi valgt at benytte denne til bestemmelse af $(\psi^n)^+$. Dette har blandt andet den fordel, at det rent teknisk, i computerprogrammet, er meget lettere at finde ψ ud fra ligning 2.2.5 end at beregne divergensen ud fra hastighedsfeltet.

Den nye ligning, der svarer til den oprindelige ligning 2.4.8, bliver

$$\rho\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1,0}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}\right)=\mathbf{F}^n-\mathbf{u}^n\rho(\psi^n)^+ \tag{5.1.1}$$

Med det nye led får denne ligning den samme rolle i løsningsalgoritmen som den oprindelige ligning, og hvis algoritmen "virker" med et kraftfelt F må den principielt også virke med et kraftfelt plus det nye led.

Ligning 5.1.1 kan omskrives på samme måde som ligning 2.4.13, og resultatet er

$$\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{\rho}\mathbf{F}^n + \Delta t\, \mathbf{u}^n (\psi^n)^+ \tag{5.1.2}$$

En fordel ved denne løsning er, at præcis denne beregning forgår i den konkrete implementation af modellen i computerprogrammet, og det er derfor let at tilføje ledet. I appendiks E, specielt i afsnit E.2, præsenteres det, hvordan vi har tilføjet ændringerne i computerprogrammet.

Ulempen ved metoden er, at værdien af det nye led til tidsskridtet n indgår explicit i løsningen af ligningerne til tidsskridtet $n+1$. Det skal derfor undersøges om tilføjelsen af det ekstra led fører til numerisk ustabilitet. I afsnit 5.3 viser vi, at det ikke umiddelbart ser ud til at være tilfældet, og vi har derfor indført ledet som netop beskrevet.

5.1.2 Implementering af enegiberegninger

Som nævnt er et af formålene med udledningen i kapitel 4 at anvende systemets kinetiske energi som udgangspunkt for en del af dataanalysen. Derfor er energiberegningerne implementeret i computerprogrammet, hvilket er gjort på baggrund af de i dette afsnit beskrevne diskretiseringer af energiberegningen. I appendiks E, specielt afsnit E.3, præsenteres det kort, hvordan vi har implementeret beregningen af den kinetiske energi i det konkrete program.

Energien og ændringerne i energien beregnes alle i naturlige enheder og pr. densitet, jvf. afsnit 2.3. Det betyder, at enheden på kinetisk energi er H^4/T^2, hvor H er domænebredden og T er hjerteslagstiden. Tilsvarende har energiændringsrater enheden H^4/T^3.

Generelt oversættes integralet over et domæne til en sum over alle gitterpunkter inden for domænet gange kvardratet på gitterbredden. Da vi kun har behov for at integrere over hele det kvardratiske domæne Ω bliver summerne simple. I det følgende skal en sum over l og k læses som en sum over hele gitteret. Altså

$$\sum_{l,k} = \sum_{l}^{N_h}\sum_{k}^{N_h}$$

hvor N_h er antallet af gitterpunkter i de to retninger.

Samlet kinetisk energi

Den samlede kinetiske energi til et tidsskridt n findes som

$$K^n = \int_\Omega \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \, dA \approx \sum_{l,k} \frac{1}{2}\left(u_1(l,k)^2 + u_2(l,k)\right) h^2 \tag{5.1.3}$$

Ændringen af kinetisk energi pr. tidsenhed til tidsskridtet n findes med en bagudrettet estimator.

$$\frac{\mathrm{d}K^n}{\mathrm{d}t} = \frac{K^n - K^{n-1}}{\Delta t} \tag{5.1.4}$$

Når vi har valgt en bagudrettet estimator har det den praktiske årsag, at det er det nemmeste at implementere i programmet. Da beregningen kun bruges til at analysere resultaterne, og ikke til at regne videre udfra, giver det imidlertid ingen anledning til problemer.

De forskellige termer i energiændringen

I ledende på venstre side af ligning 4.1.10 og 4.2.2 indgår der ingen tidsafhængighed, derfor er det muligt at beregne ledenes størrelser direkte ud fra de indgående værdier til det pågældende tidsskridt.

For eksempel bestemmes kraftens arbejde pr. tidsenhed ved

$$\int_\Omega u_i \left(\frac{F_i}{\rho}\right) \, dV \approx \sum_{l,k} u_1(l,k)\left(\frac{F_1(l,k)}{\rho}\right) + u_2(l,k)\left(\frac{F_2(l,k)}{\rho}\right)$$

Der indgår en divergens af hastighedsfeltet i to af ledende. Den er imidlertid fundet i forvejen i forbindelse med udregningen af ledet $(\psi^n)^+$ til den modificerede Navier-Stokes ligning, så den indgår blot som de andre led. Det eneste nye, der skal beregnes, er de stedslige afledte $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Det gør vi med den fremadrettet estimator (jvf. 2.4.2). For eksempel

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(lh, kh) \approx (D_1^+ u_2)(l,k) = \frac{u_2(l+1,k) - u_2(l,k)}{h}$$

Disse led indgår ikke alene, men i en sum over hele domænet (hvor den inderste sum på højresiden kommer af den underforståede sum på venstresiden)

$$\int_\Omega \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \, dV \approx \sum_{l,k}\left(\sum_{i,j}\left(\frac{\mu}{\rho}(D_j^+ u_i)(l,k)\right)^2\right) h^2$$

Det betyder, at resultatet ved anvendelse af den fremadrettede estimator ikke afviger fra det resultat man ville opnå ved brug af den bagudrettede estimator.

Ved at implementere de her beskrevne beregninger i computerprogrammet er vi altså i stand til dels at undersøge, hvilken betydning valget af Navier-Stokes ligning har, og dels at undersøge energiforholdene i modellen. Vi har lavet en del modelkørsler og analyser af data fra disse. Resten af dette kapittel vil omhandle disse resultater.

5.2 Generel præsentation af modellens resultater

I dette afsnit gives en generel præsentation af modellens resultater. Dette sker med to formål; dels at give et overblik over hvilke resultater modellen leverer, og dels at præsentere de repræsentationsmetoder, der benyttes som udgangspunkt for dataanalysen. Afsnittet er skrevet på baggrund af en kørsel af den originale model. Der er dog tilføjet en beregning af de i afsnit 4, og 5.1.2 beskrevne energiled. Disse tilføjelser har imidlertid kun betydning for modellens output, og ikke for beregningsalgoritmerne.

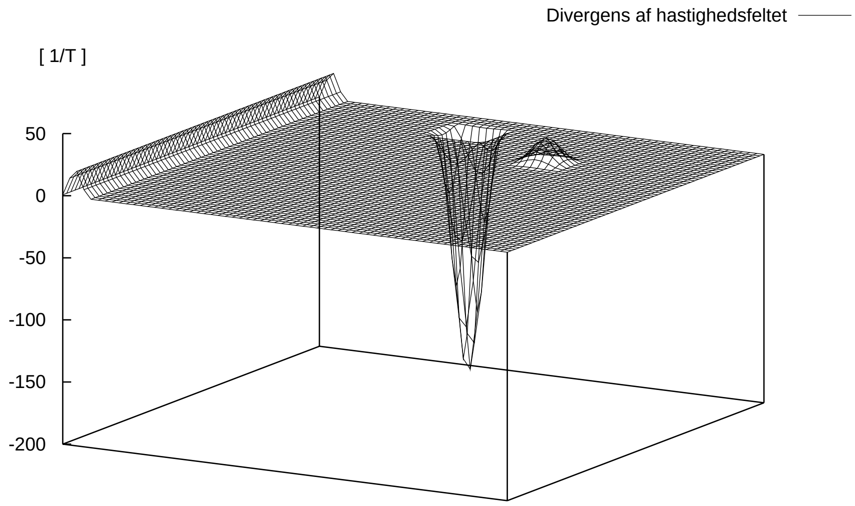
Alle data i dette afsnit stammer fra en modelkørsel, hvor der er 5616 tidsskridt pr. hjerteslag, og der er 64 gitterpunkter pr. domænelængde. Hjertet er endvidere fastspændt som beskrevet i afsnit 2.1.2, og den i afsnit 2.3 omtalte gammafaktor er i denne kørsel sat til $0,04$, hvilket svarer til at viskositeten er skaleret op med en faktor 25.

Generelt vil alle data på de forskellige grafer være i naturlige enheder.

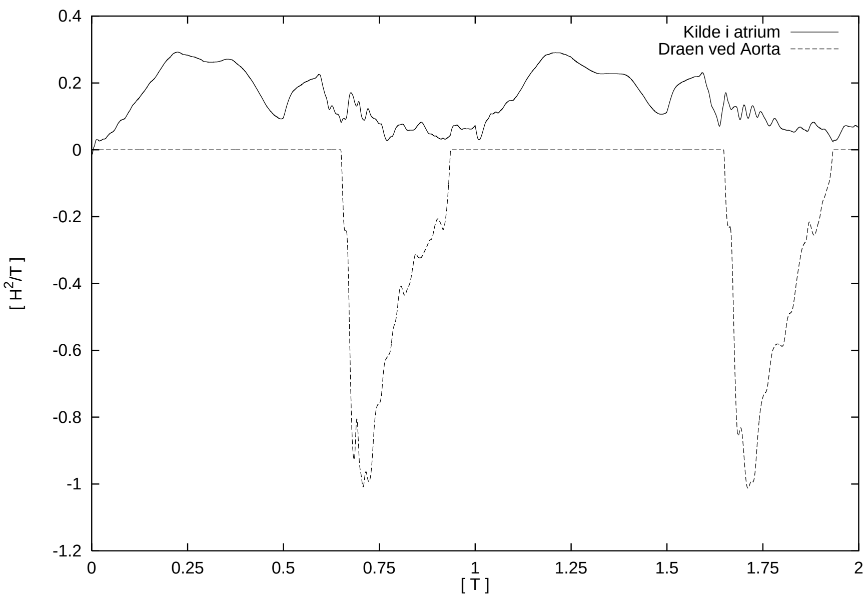
Bemærk at der på vektorplots kun er vist 32×32 punkter. Det betyder, at i forhold til de data som er tilgængelige, har vi fjernet hverandet datapunkt. Dette er gjort for at forbedre læseligheden af figuren. Udover denne datareduktion har vi valgt at sætte vektorer, hvor både første og anden komposanten er mindre end $0,01$ til nul. Begrundelsen for dette er, at vores vektorplotteprogram har problemer med meget små størrelser. Man risikerer specielt, at retningen bliver tilfældig, hvilket vi naturligvis finder problematisk. Der kan stadig være en lille usikkerhed på retningen af vektorerne, men denne anser vi for at værre ubetydelig for dataanalysen. På vektorplottene vil vektorer med norm mindre end ca. $0,1$ kun ses som en pilespids. Skalaen på alle de vektorplot, der vises er den samme, og pilene kan altså umiddelbart sammenlignes.

5.2.1 Kilder og dræn

Som beskrevet er kilder og dræn fordelte. På figur 5.1 ses den rummelige fordeling af kilder og dræn. Det er altså ψ^n fra ligning 2.4.12 som ses. Her er valgt et tidsskridt, hvor aorta-klappen er åben. Det ses, at den numeriske størrelse af divergensen ved aorta er betydelig større end ved kilden. På figur 5.2 ses strømingshastigheden (det vil sige Q som beskrevet i afsnit 2.2.3) for de to interne kilder. Af denne ses, at indstrømningen af væske ved atriumkilden sker nogenlunde jævnt igennem hjerteslaget, mens udstrømningen til aorta sker inden for et koncentreret tidsinterval. Figuren kan således bruges til at bestemme ved hvilke tider aortadrænet er åbent. Tiderne for åbning af aorta er ikke den samme ved alle de modelkørsler vi præsenterer, men varitionerne er små.



Figur 5.1 Divergensen af hastighedsfeltet, ψ, til tiden $0,75$ T.



Figur 5.2 Strømningshastigheden for kilden i atrium og aortadrænet som funktion af tiden.

5.2.2 Hastighedsfeltet

Når modellen benyttes til medicinske formål er hastighedsfeltet, og randens konfigration, specielt omkring mitralklappen, et af de vigtigste resultater fra en modelkørsel.

På figur 5.3 og 5.4 vises hastighedsfeltet sammen med hjerteranden til et udvalgt antal tidsskridt gennem en hjertecykel. Hjerterande er repræsenteret ved en række cirkler, hvor hver cirkel svarer til et randpunkt. Dermed kan man direkte se, hvordan randen er parametriseret. De to lodrette streger som er afkoblede fra resten af randen, er de punkter som hjertet er fikseret til (se afsnit 2.1.2).

Det kan umiddelbart se ud som om, væsken strømmer gennem randen, men det er naturligvis ikke tilfældet, idet randen har samme hastighed som væsken i området (se evt. afsnit 2.2.2).

Modellen starter når mitralklappen netop er begyndt at åbne, hjertet er altså i sin fyldningsfase.

Lukningen af mitralklappen ses meget tydeligt, og generelt er hele mønstret af hjertets bevægelse rimelig lig et virkeligt hjertes [Adeler & Jacobsen, 2000].

Generelt ses det, at de største hastigheder forekommer indenfor hjerteranden, og hastighederne ved den eksterne kilde er således meget små.

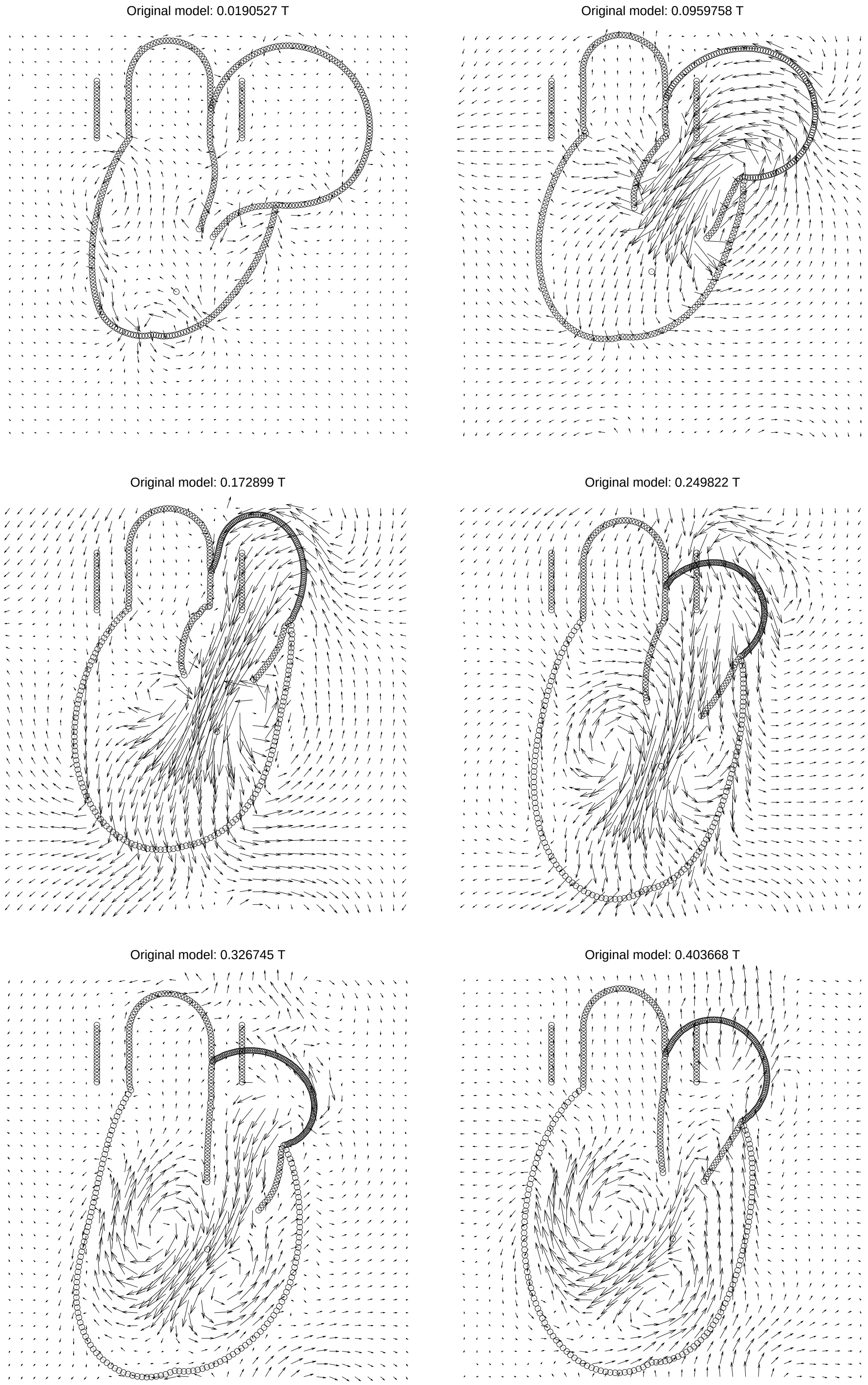
5.2.3 Samlet kinetisk energi i systemet

Som tidligere nævnt vil vi benytte forskellige afbildinger af energien i forbindelse med dataanalysen. I dette afsnit betragtes den samlede kinetiske energi i systemet. Det vil sige, at energien er beregnet udfra ligning 5.1.3.

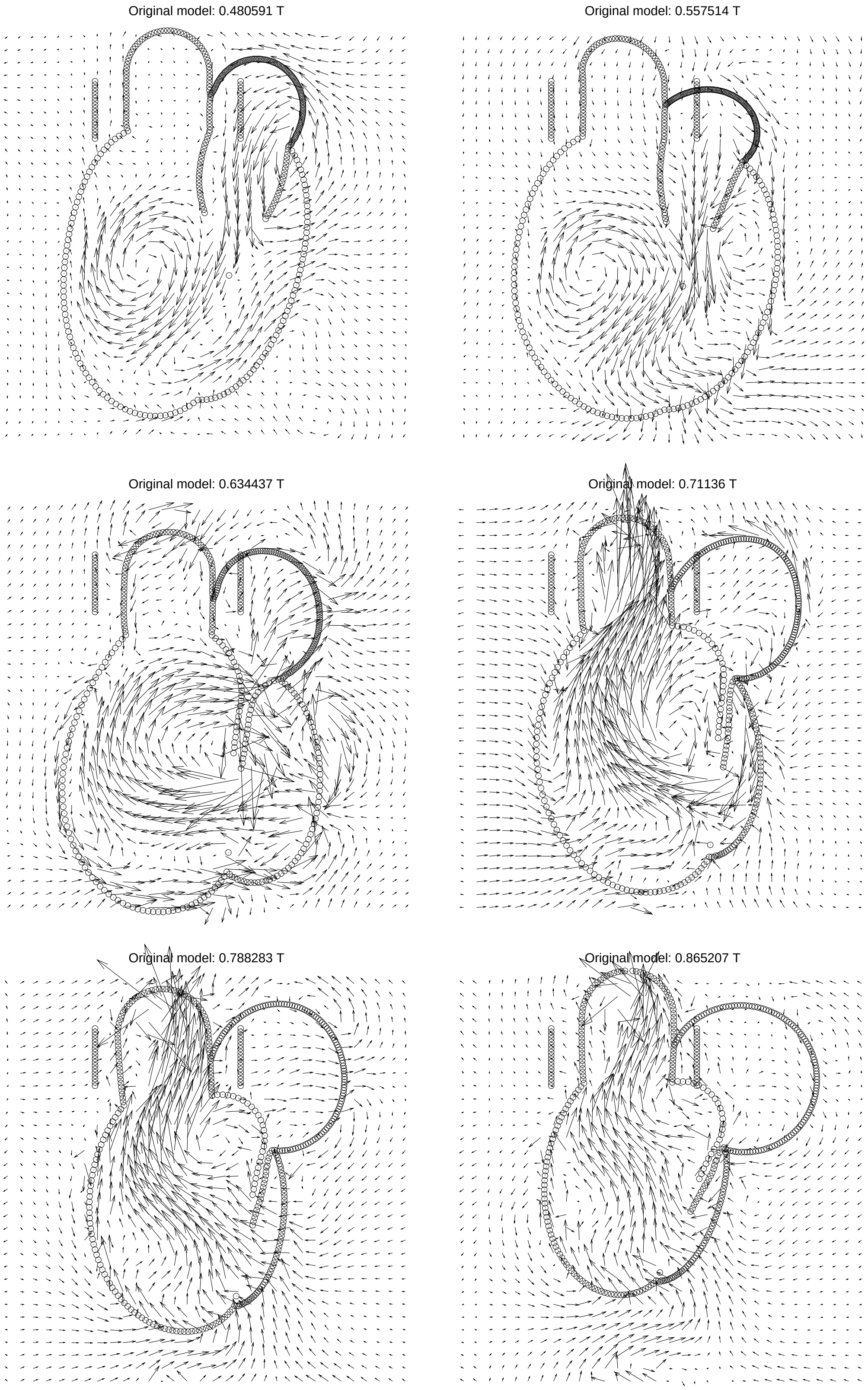
I figur 5.5 ses den samlede kinetiske energi i systemet. På grafen er førsteaksen tid i naturlige enheder, svarende til brøkdele af et samlet hjerteslag. På andenaksen er dimensionen energi divideret med densiteten, og dette er som alt andet angivet i naturlige enheder. Fremover vil vi underforstå at alle energier og energiændringer er divideret med densiteten, idet densiteten ikke er en parameter vi på noget tidspunkt ændrer.

Det ses tydeligt, at den kinetiske energi i systemet er 0 til tid 0, svarende til at starthastighederne i systemet er 0. Sammentrækningen af hjertet, hvor man også så høje hastigheder i figur 5.3 og 5.4, ses som de to dominerende toppe. Den lille top ved ca. tid $0,15T$ er formodenligt et udslag af, at det ikke er særlig realistisk, at alle hastigheder sættes til nul til starten, idet den genfindes i langt mindre grad i andet hjerteslag.

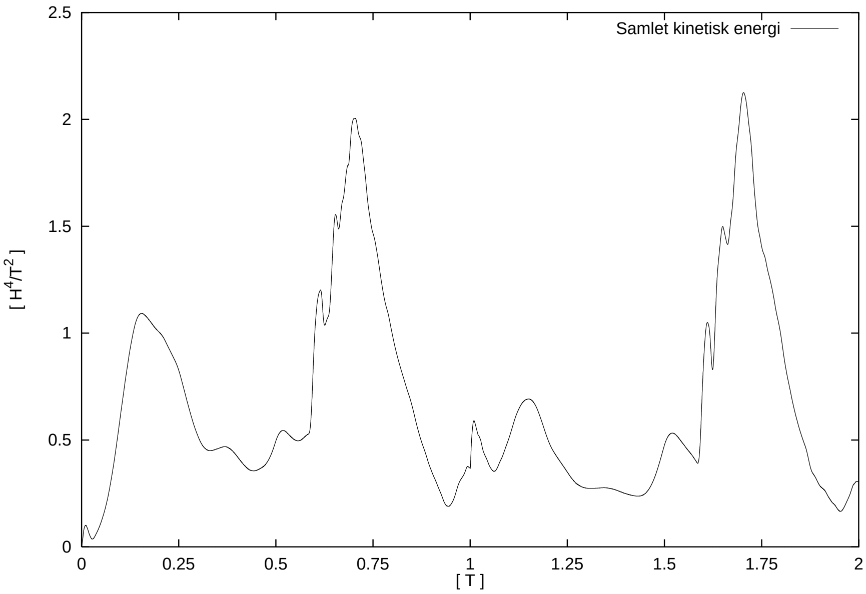
På figur 5.6 ses ændringen af den totale kinetiske energi pr. tid, hvilket svarer til den tidsligt afledte af den samlede kinetiske energi. Værdierne er fundet på baggrund af udtrykket i ligning 5.1.4, som svarer til den diskrete version af venstresiden af ligning 4.2.2.



Figur 5.3 Plot af vektorfelt for hastigheden i den første halvdel af første hjerteslag, (se teksten for detaljer om opsætningen).



Figur 5.4 Plot af vektorfelt for hastigheden i den anden halvdel af første hjerteslag, (se teksten for detaljer om opsætningen).



Figur 5.5 Samlet kinetisk energi i systemet som funktion af tiden.

Der er igen tid i naturlige enheder på førsteaksen, og på andenaksen er det energi pr. tid i naturlige enheder (hvor der som overalt i dette kapitel er underforstået, at energien er divideret med densiteten). Det sidste svarer til effekt.

Det ses, at der sker ret drastiske ting under hjertets sammentrækning. Bemærk at der er mange datapunkter på graferne, og at der ikke blot tegnes streger mellem enkelte punkter som ligger spredt.

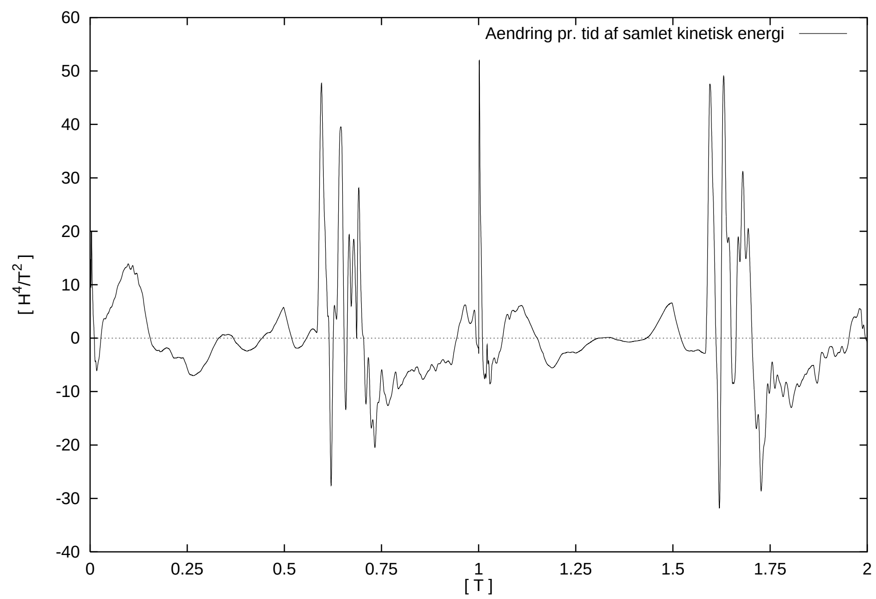
5.2.4 Ændringen af energi fra de forskellige led

Som beskrevet i afsnit 4 kan den i figur 5.6 viste ændring af den samlede energi findes som en sum af fire tolkbare led (se ligning 4.2.2). I dette afsnit vil vi præsentere ændringen i energi beregnet ud fra disse led. Princippet i de diskrete beregninger er forklaret i afsnit 5.1.2.

Alle grafer i dette afsnit viser energiændring pr. densitet pr. tid i naturlige enheder som funktion af tiden i naturlig enhed. De enkelte led er plottet med fortegn, forstået på den måde, at grafen direkte viser deres biddrag til den samlede ændring.

Randens arbejde pr. tid

På figur 5.7 ses randens arbejde pr. tid. (jvf. ligning 4.3.1). Randens arbejde er den absolut største kilde til kinetisk energi i systemet. Det er meget tydeligt,



Figur 5.6 Ændringen af total kinetisk energi i systemet pr. tid som funktion af tiden.

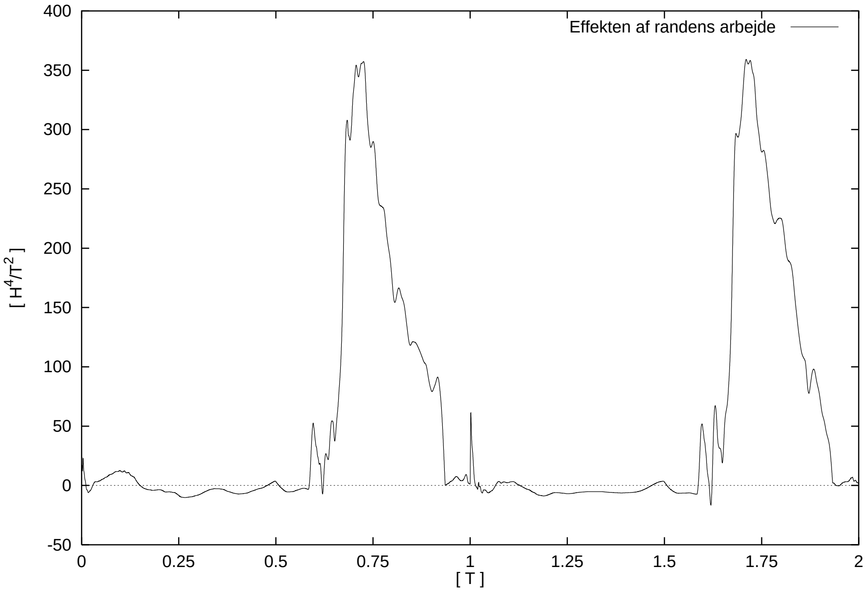
at randen arbejder mest på systemet under sammentrækningen, hvor arbejdet som man måtte forvente er positivt. Det ses også, at randen uden for sammentrækningsintervallet både arbejder positivt og negativt. Det betyder, at i løbet at et hjerteslag er der tidspunkter, hvor væskens hastighed primært er modsatrettet af randkraften.

Den viskøse dissipation pr. tid

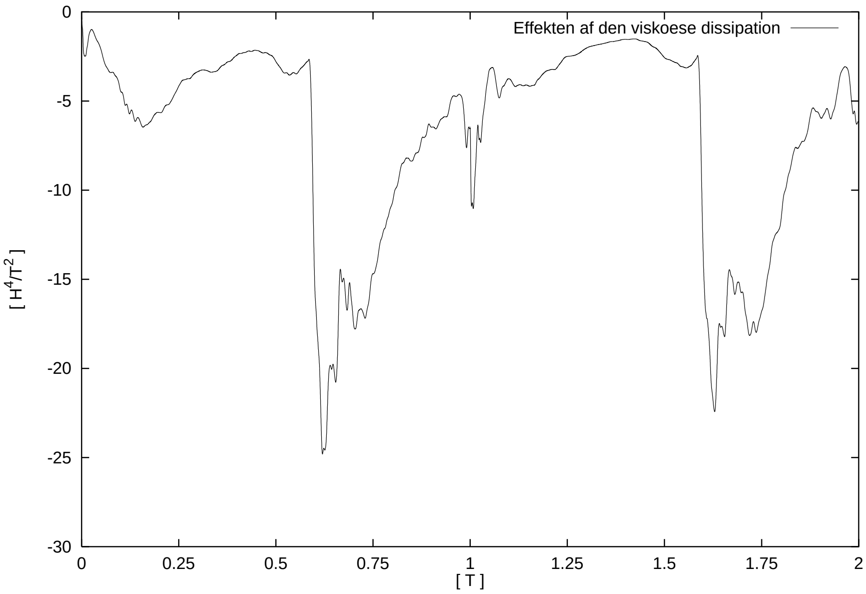
Figur 5.8 viser den viskøse dissipation pr. tid. (jvf. ligning 4.3.2). Det ses, at der er en tydelig sammenhæng mellem randens arbejde og den viskøse dissipation. Specielt stiger dissipationen, på samme måde som randarbejdet, meget pludselig op omkring tid $0,6T$. Denne sammenhæng skyldes, at når der er store stedslige variationer i hastighederne er det viskøse led stort.

Arbejde pr. tid fra kild og dræn

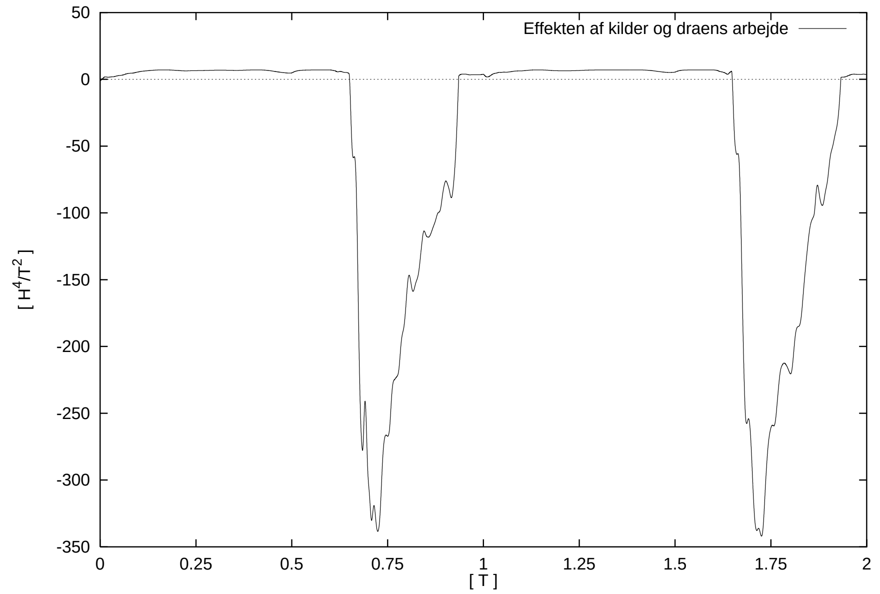
Arbejdet som kilde og dræn udfører på væsken pr. tid er vist på figur 5.9. (jvf. ligning 4.3.3). Det ses umiddebart, at det primært er, når drænet er åbent (jvf. figur 5.2), at dette led har en væsentlig betydning. Tilgengæld er ledet meget væsentligt under udpumpningen, og er således det led, der har størst betydning for fjernelsen af kinetisk energi fra systemet. Ser man lidt nærmere på, hvad der sker uden for udpumpningsintervallet fremgår det, at dette led også bidrager positivt til energien i systemet. Bidraget er dog meget mindre end randens.



Figur 5.7 Randens arbejde på systemet pr. tid som funktion af tiden.



Figur 5.8 Viskøs dissipation i systemet pr. tid som funktion af tiden.



Figur 5.9 Arbejde pr. tid fra kild og dræn på systemet som funktion af tiden.

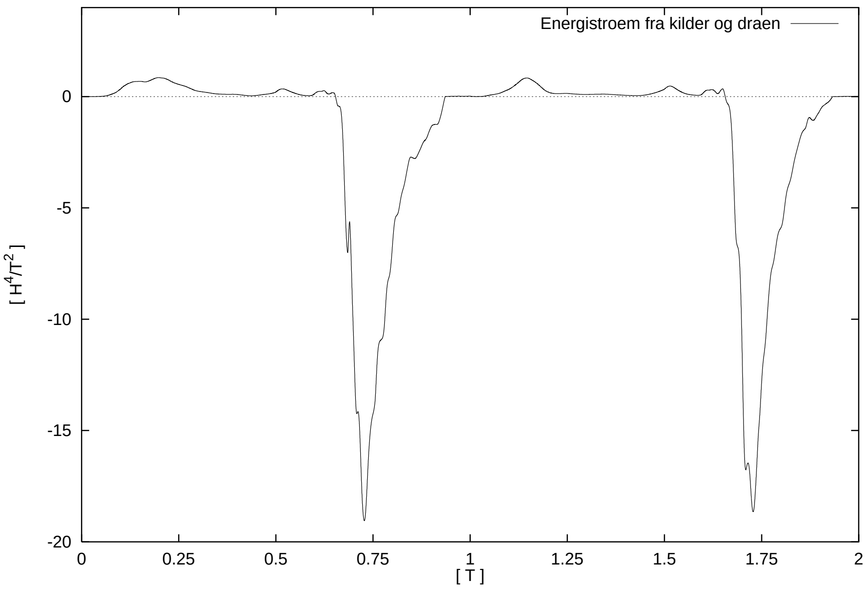
Energistrøm ved kilder og dræn

Det sidste led som har indflydelse på ændringen af den kinetiske energi er energistrømmen ved kilder og dræn (jvf. ligning 4.3.5). Med energistrøm menes her den mængde kinetisk energi, der strømmer ind i eller ud af kilderne pr. tid. Energistrømmen er det led, hvor forskellen mellem de to modeller ses i energiberegningerne. Vi anvender termen energistrøm om dette led og om det tilsvarende led i den modificerede model. Dette er en praktisk men ikke helt præcis sprogbrug, idet der i den modificerede model er tale om en energidissipation, når der strømmer væske ind i systemet.

Energistrømmen for den originale model er vist i figur 5.10. Det ses, som man på baggrund af de udledte sammenhænge måtte forvente, at der i alt strømmer energi ind i systemet når klappen ved aorta er lukket, og strømmer energi ud når den er åben. Det ses endvidere at den energi, der strømmer ind er væsentlig mindre end den energi, der strømmer ud, samt at hele ledet er lille i forhold til de øvrige led, der har betydning for ændringen af den samlede kinetiske energi.

5.2.5 Vurdering af energiændringsberegningere

Vi har som beskrevet med ligning 4.2.2 og som netop udnyttet ovenfor to forskellige måder at beregne energiændringen pr. tid på; en direkte tidsafledt på baggrund af den kinetiske energi fundet ud fra hastighederne i systemet; og som en sum af fire led, der giver anledning til energiændring i systemet.



Figur 5.10 Energistrøm ved kilder og dræn pr. tid som funktion af tiden.

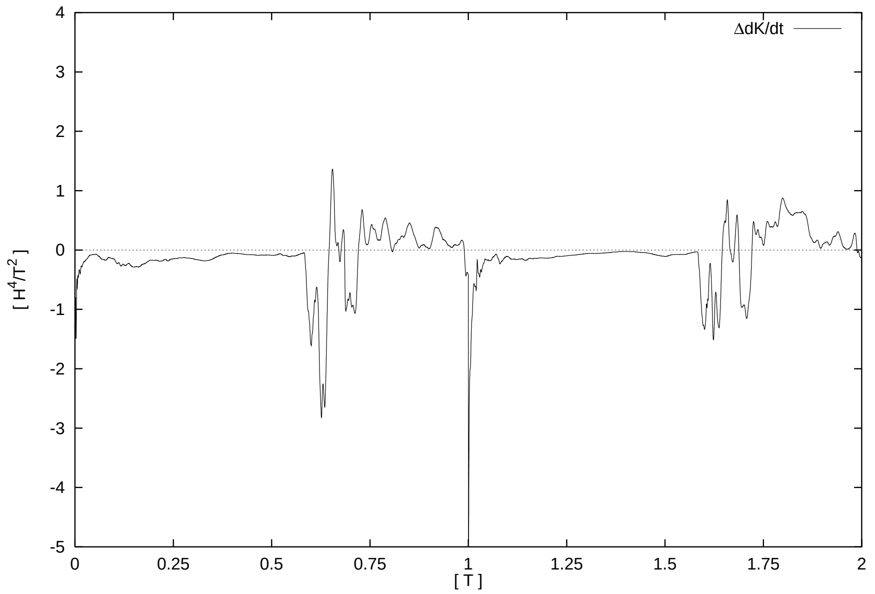
Den sidste metode bygger imidlertid på, at vi finder energiændringen svarende til de fire led ud fra systemets tilstand til hver tid, og den er ikke direkte knyttet til den faktiske beregningsalgoritme i systemet. Der er således tale om en approksimation. Det er derfor oplagt at undersøge, hvordan disse to metoder stemmer overens.

Forskellen mellem resultatet fra de to metoder, $\Delta \frac{dK}{dt}$, beregnes ud fra de ovenfor præsenterede modeldata på baggrund af den diskrete version af følgende ligning

$$\Delta \frac{dK}{dt} = \int_\Omega u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dA - \left(\int_\Omega \frac{u_i F_i}{\rho}\, dA - \int_\Omega \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dA + \int_\Omega \frac{p\psi}{\rho}\, dA + \int_\Omega \frac{1}{2} u_i u_i \psi\, dA \right) \quad (5.2.1)$$

Denne differens er plottet i figur 5.11. Ideelt set burde grafen være nul overalt. Det er ikke tilfældet, men sammenlignet med de faktiske størrelser af energiændringen pr. tid i figur 5.6, ses det at disse er ca. en faktor 10 større end fejlen.

En mulig kilde til denne fejl kan være, at vi har valgt at benytte en primitiv diskretisering af den rummelige integration (se afsnit 5.1.2). Vi har gennem vores arbejde med energidataene, fået fornemmelsen af at energibergningen



Figur 5.11 Differensen mellem to beregningsmetoder for ændring af total energi pr. tid som funtion af tiden, jvf. ligning 5.2.1.

er meget afhængig af gitterbredden, og hvis man ønsker at benytte energidata til yderligere undersøgelser, bør dette undersøges nærmere.

Vi vurderer dog at energiændringen fundet ved de fire led giver et godt kvalitativt grundlag for at beskrive, hvad der sker i systemet.

5.3 Vurdering af den numeriske metodes stabilitet

Som beskrevet i afsnit 5.1.1 implementerer vi det ekstra led i den modificerede Navier-Stokes ligning explicit. Dette kan som nævnt i samme anledning føre til numerisk ustabilitet. For at få et overslag over hvor stort dette problem er har vi lavet følgende lille undersøgelse af systemets afhængighed af tidsskridtstørrelsen.

Vi har lavet kørsler med den originale og den modificerede verison af modellen med forskellige tidsskridt. Konkret har vi valgt

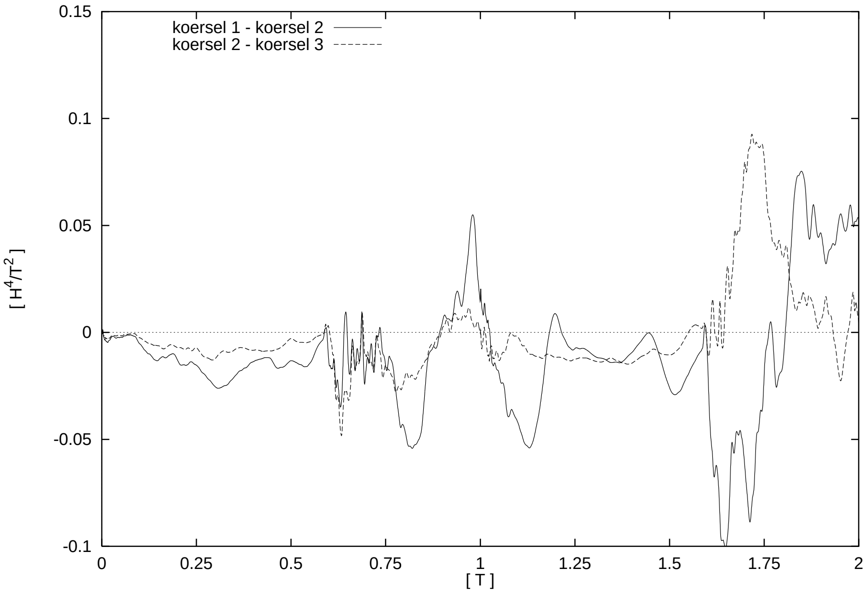
kørsel 1: 2808 tidsskridt pr. hjerteslag

kørsel 2: 5616 tidsskridt pr. hjerteslag

kørsel 3: 11232 tidsskridt pr. hjerteslag

altså tre kørsler med en fordobling af antallet af tidsskridt mellem hver.

Vi har beregnet forskelle i den total kinetiske energi mellem først kørsel 1 og 2, og derefter mellem kørsel 2 og 3. Dette er gjort for både den originale model og for den modificerede model. Figur 5.12 viser resultatet for den originale model og figur 5.13 tilsvarende for den modificerede model.



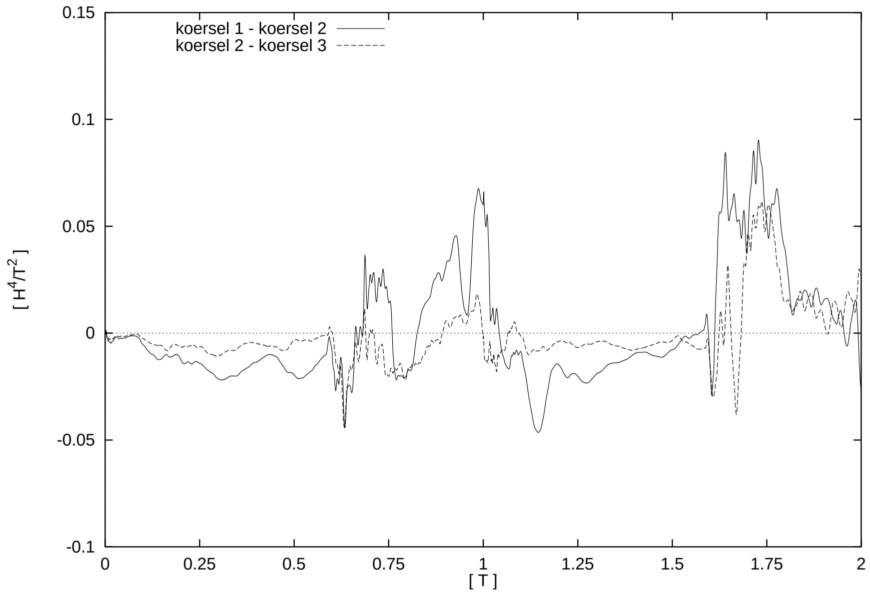
Figur 5.12 Graferne viser forskellen i total energi mellem de angivne kørsler som funktion af tiden, for den originale model.

Hvis der ingen forskel var mellem kørslerne skulle kurverne have været nul til alle tider. Det er de tydeligvis ikke, der er altså forskel på, hvilket størrelse tidsskridt man bruger.

Der ses endvidere en tendens til, at kurven for forskellen mellem kørsel 2 og 3 ligger tættere på nul end kurven for forskellen mellen kørsel 1 og 2.

Størelseordnen af forskellen mellem kørsel 2 og 3 er cirka den samme for den originale og den modificerede model, og faktisk er forskellen generelt lidt mindre for den modificerede model. Dette tager vi som udtryk for, at der ikke er noget umidelbart numeriske problem i at vi har indført det nye led i den modificerede Navier-Stokes ligning explicit.

Vi vil i det følgende normalt (det vil sige hvis ikke gitterstørelsen ændres) benytte 5616 tidsskridt pr. hjerteslag, da vi finder at denne indstilling har et udemærket forhold mellem tid og præcision.



Figur 5.13 Graferne viser forskellen i total energi mellem de angivne kørsler som funktion af tiden, for den modificerede model.

5.4 De generelle forskelle mellem den modificerede og den originale model

I dette afsnit behandles de generelle forskelle mellem de resultater af den originale model, som blev præsenteret i afsnit 5.2, og resultaterne af den modificerede model. I de efterfølgende to afsnit ser vi nærmere på hvilken betydning modifikationen af modellen har for de konkrete praktiske problemer (jvf. afsnit 2.1.2).

Alle de data, der præsenteres i det følgende stammer fra henholdsvis en kørsel med modificeret model og en kørsel med original model, hvor alle parametre er sat ens. Der er kørt med 64×64 gritterpunkter, en gammafaktor på $0,04$ og 5616 tidsskridt pr. hjerteslag, samt fastspændt hjerte.

5.4.1 Forventede forskelle

Dette afsnit indeholder en kort opsamling af de teoretiske forskelle mellem modellerne sammenholdt med modellens generelle resultater (jvf. afsnit 5.2). Dette sker med henblik på nemmere at kunne diskutere, hvordan de resultater, der efterfølgende præsenteres stemmer (eller ikke stemmer) overens med, hvad vi teoretisk forventer.

Forskellen mellem de to modeller ligger i behandlingen af impulsen i forbindelse med, at der strømmer væske ind i modellen. I den originale model strømmer denne væske ind med en hastighed svarende til den hastighed væsken har det pågældende sted i modellen. I den modificerede model strømmer denne væske ind med hastigheden nul . I praksis betyder det, at der i den modificerede model er tilføjet ledet $-\psi^+\mathbf{u}$ i Navier-Stokes ligning (se kapitel 3).

Det betyder, at man umiddelbart må forvente, at der er mindre hastigheder i den modificerede model, idet det nye led i hastighedssændringen er direkte modsatrettet hastighed på et hvert givent sted og tidspunkt. Modifikation må forventes at være mest markant i området omkring atrium, idet hastigheden ved den eksterne kilde, hvor der også strømmer væske ind, er små, således at ledet $-\psi^+\mathbf{u}$ bliver numerisk lille (jvf. figur 5.3 og figur 5.4).

I overensstemmelse med, at der forventes mindre hastigheder i den modificerede model, viser energiregnskabet, at der ved væskeindstrømning, strømmer energi ind i den originale model, mens der dissiperes en tilsvarende energimængde i den modificerede model (se kapitel 4).

Vi kalder dette led i energiregnskabet for energistrømmen ved kilde og dræn i såvel den originale og som den modificerede model.

I figur 5.10 ses det, at den energiændring der i den originale model hidrører fra indstrømningen af energi er lille i forhold til de andre led, der bidrager til energiændringen. Det peger i retningen af, at den modificerede model ikke vil give væsentligt anderledes resultater end den oprindelige model.

Det er imidlertid svært at forudsige, hvordan systemet vil reagere på tilføjelsen af det nye led. Dette skyldes at systemets udvikling hele tiden er følsomt på dets tilstand. For det første er Navier-Stokes ligning i sig selv ulineær idet venstresiden indeholder ledet $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ (se for eksempel ligning 2.1.1), hvilket betyder, at små ændringer kan få store konsekvenser. Endvidere afhænger alle de andre led, der bidrager til impuls- og energiændring i systemet (viskositeten, randkraften og trykkets arbejdet ved kilde og dræn) af hvordan systemets tilstand er. Derfor vil vi nu straks gå videre til de resultater, modellen faktisk giver.

5.4.2 Hastighedsfeltet

I det følgende afsnit analyseres forskellen mellem de hastighedsfelter, vi har fået på baggrund af den modificerede model, og resultaterne af den originale model. Som det fremgår i afsnit 2.1 og i afsnit 5.2 er hastighedsfeltet det væsentligste output i forbindelse med anvendelse af modellen i medicinske sammenhænge. Derfor er det selvfølgelig interessant, hvorvidt den modificerede model giver anledning til væsentlige ændringer i strømningsmønstreret. Imidlertid indeholder hastighedsdata meget store mængder tal i forhold til mængden af information, der direkte kan bruges i forbindelse med det problem vi tager udgangspunkt i (jvf. indledningen og afsnit 2.1.2). Derfor har vi valgt at begrænse os til at lave en kvalitativ analyse af forskellene mellem hastighedsfelterne.

I figur A.1 og A.2 i bilag A er der vist et sæt hastighedsfelter fra det første hjerteslag fra en kørsel med den modificerede model. De tilsvarende hastighedsfelter for den originale model er vist i figur 5.3 og 5.4. Desuden har vi lavet et sæt figurer, hvor hastighedsfelterne fra den modificerede model er trukket fra hastighedsfeltet fra den originale model. Disse vektorfelter ses i figur A.3 og A.4 i bilag A. Da hjerterandens bevægelse er meget tæt på at være identisk for de to modeller, har vi valgt at indtegne hjerteranden fra den originale model sammen med dette vektorfelt. Den indtegnede rand letter tolkningen af feltet væsentligt. I det følgende vises et udsnit af de forskellige hastighedsfelter.

Generelle træk

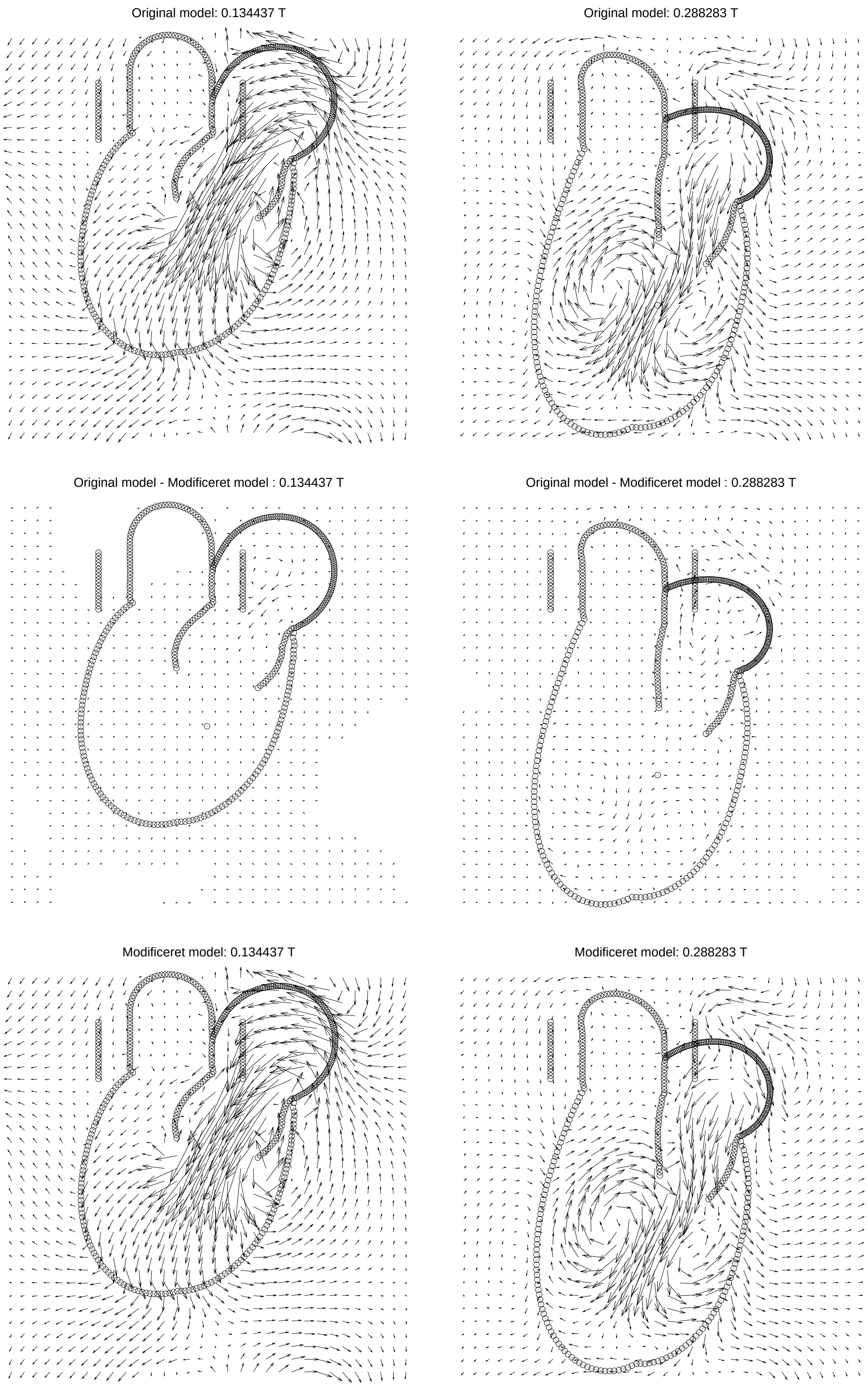
Den primære konklusion omkring de to sæt hastighedsfelter, fra henholdsvis den originale og den modificerede model, er at der ikke er ændret i det generelle strømningsmønster. Det er en "grovkornet" vurdering, men da modellen netop anvendes til at studere overordnede tendenser i strømningsmønsteret er det imidlertid ikke en uvæsentlig konklusion. Endvidere er den ikke i sig selv voldsomt overraskende, idet vi har set, at det led, hvor forskellen mellem de to modeller findes, er lille i forhold til de andre led, der har betydning for energien i systemet (jvf. afsnit 5.4.1).

Sekundært ses det, at de eksisterende forskelle primært findes omkring atrium, samt at der ikke i særlig grad ses forskelle omkring den eksterne kilde. Det vil sige, at modifikationen, der principielt altid har betydning, når der strømmer væske ind i systemet, i praksis kun har betydning ved atriumkilden. Dette er igen ikke overraskende, da det kan forklares ved, at hastighederne er meget større ved atrium end hastighederne ved den eksterne kilde (som er det eneste andet sted, hvor der kan strømme væske ind).

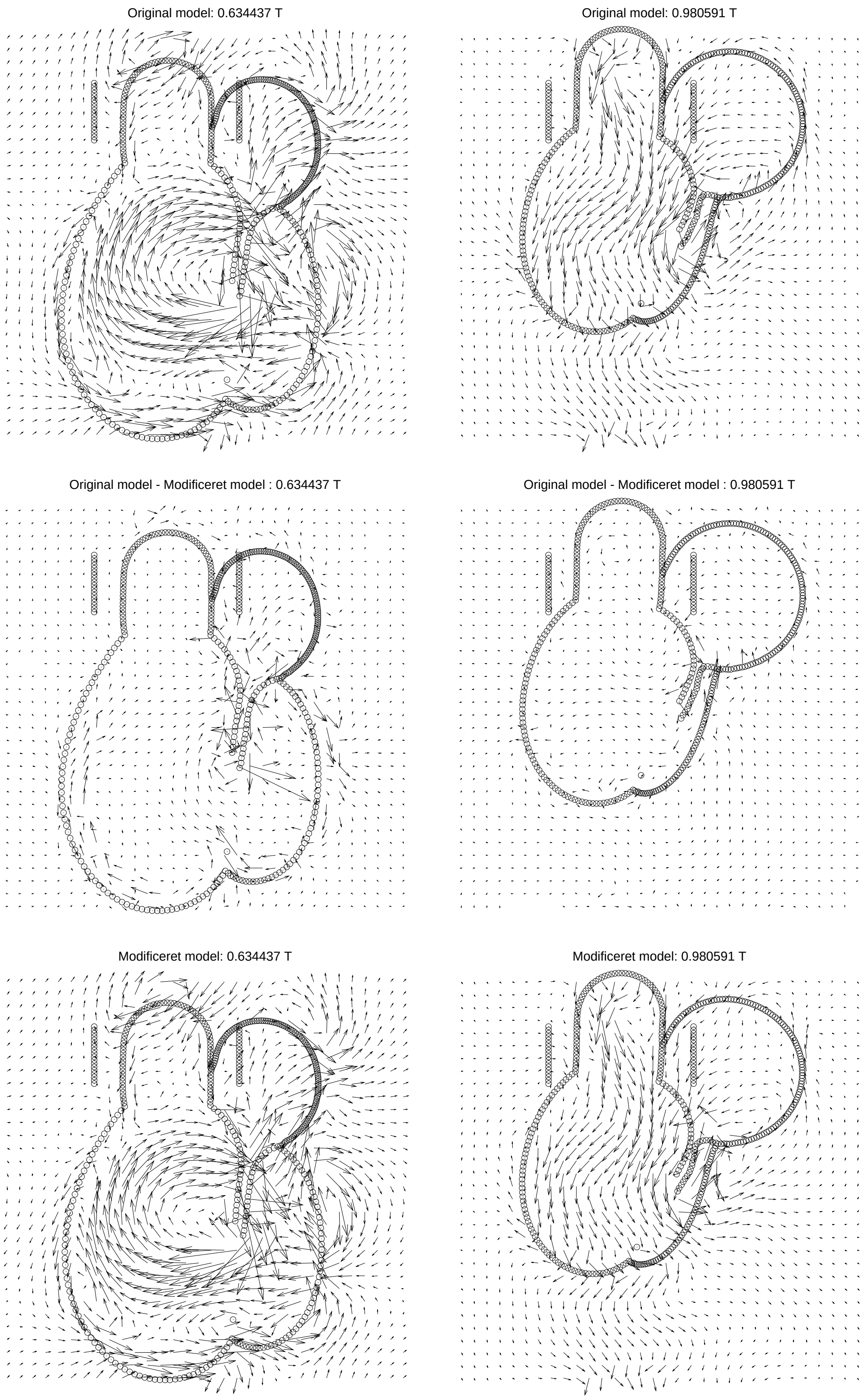
Den tids og stedslige udvikling

Ved at studere differensen mellem de to vektorfelter mere i detalje, ses de første markente forskelle omkring tid $0,13T$. Der er vist et sæt vektorfelter fra denne tid i figur 5.14. Det ses, at de tydeligste forskelle i hastighederne findes omkring centrum af atrium. Desuden ses det, at hastighederne har samme orientering i de to modeller. Forskellen består således primært i at hastighederne ved atriums centrum er numerisk større i den originale model end i den modificerede model. Dette resultat er, som forklaret i afsnit 5.4.1, præcis hvad man ville forvente.

Tendensen til, at forskellen mellem de to modeller består i, at hastighederne er numerisk størst i den originale model, mens strømningsretningen er ens, fortsætter gennem hele hjerteslaget. Det er dog ikke en entydig tendens, hvilket ses allerede omkring tid $0,3$, hvor forskellene er meget varierede i retning. I løbet af et hjerteslag spreder forskellene sig ud i hele hjertet, og der ses store forskelle såvel omkring udløbet ved aorta (hvor hastighederne er store) som



Figur 5.14 Hastighedsfelter fra den originale og den modificerede model til to forskellige tider.



Figur 5.15 Hastighedsfelter fra den modificerede og den originale model til to forskellige tider.

ved hjerteranden. Det vil sige, at modifikationen har givet anledning til en "forstyrrelse" af systemet, men at det er svært at pege på en generel tendens i ændringen, (jvf. figur 5.14 og 5.15).

Ved slutningen af hjerteslaget forsvinder næsten alle forskelle mellem de to hastighedsfelter. Dette sker i takt med, at hastighederne i systemet generelt falder, men det ser ud som om at de relative forskelle faktisk også falder. Ihvertfald er der ikke tegn på, at forskellen mellem de to systemer er en ophobende effekt. I figur 5.15 ses et sæt hastighedsfelter fra slutningen af det første hjerteslag.

5.4.3 Kinetisk energi i systemet

Som nævnt tidligere giver data for den kinetiske energi i modellen, et samlet udtryk for systemets samlede "tilstand". Derfor kan vi ud fra disse data give et overordnet billede af forskellen mellem de to modeller. Desuden er det nemmere at lave en kvantitativ sammenligning af de to modeller, end det er ved sammenligningen af hastighedsfelterne, netop fordi data er reduceret til meget få tal til hver tid.

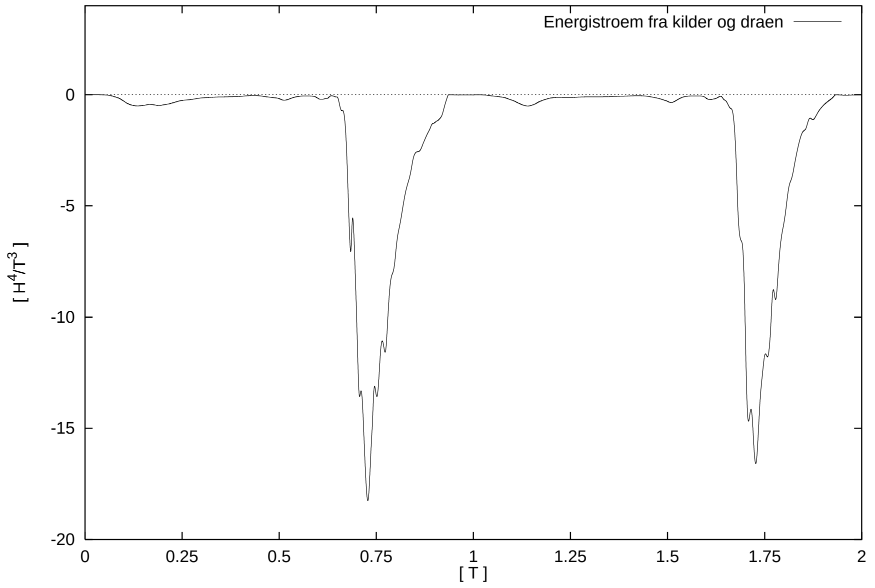
Energi strømmen/dissipation ved kilde og dræn

Den primære forskel mellem de to modeller ligger i antagelserne omkring impulsen i forbindelse med indstrømningen af væske. Derfor er det i forbindelse med indstrømningen af væske, at vi finder forskellene mellem de to modeller.

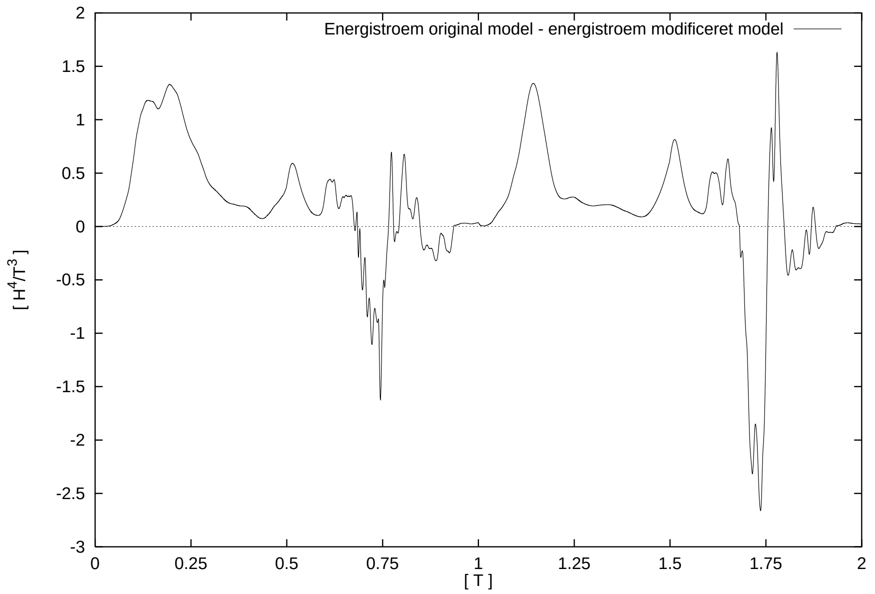
For den modificerede model er energistrømmen ved kilder og dræn vist som funktion af tiden i figur 5.16. Det tilsvarende plot for den originale model ses i figur 5.10. Endvidere er differensen mellem energistrømmen fra den orginale og den modificerede model vist i figur 5.17. Det ses for det første, at der ikke er nogen nævneværdig forskel på de (negative) store toppe. Disse toppe, viser den kinetiske energi som strømmer ud ved aortadrænet, og her er der, som gennemgået i kapitel 3 og 4, ikke forskel på situationen i den originale og den modificerede model. Forskellen findes kun i forbindelse med, at der kommer væske ind i systemet, hvilket forkommer ved såvel den eksterne kilde som ved kilden i atrium. Imidlertid, er hastighederne omkring den eksterne kilde, som tidligere omtalt, meget små, og derfor hidrører forskellene i energistrømmen formodentligt primært fra indstrømningen af væske ved atrium.

De maksimale forskelle mellem energistrømmen i de to modeller er i størrelsesordenen $2^{H^4}/_{T^3}$. I sammenligning med effekten fra de andre led, der bidrager til ændringen i den kinetiske energi, (jvf. figurer 5.7, 5.8 og 5.9), er der altså umiddelbart tale om meget små størrelser. Integreres de op over tid[1], ser det imidlertid anderledes ud. Det er vist i figur 5.18. Da der er tale om et integral over tid af en størrelse med dimension effekt er resultatet en størrelse med

[1] I praksis har vi selvfølgelig summeret og ganget med tidsskridtstørrelsen.

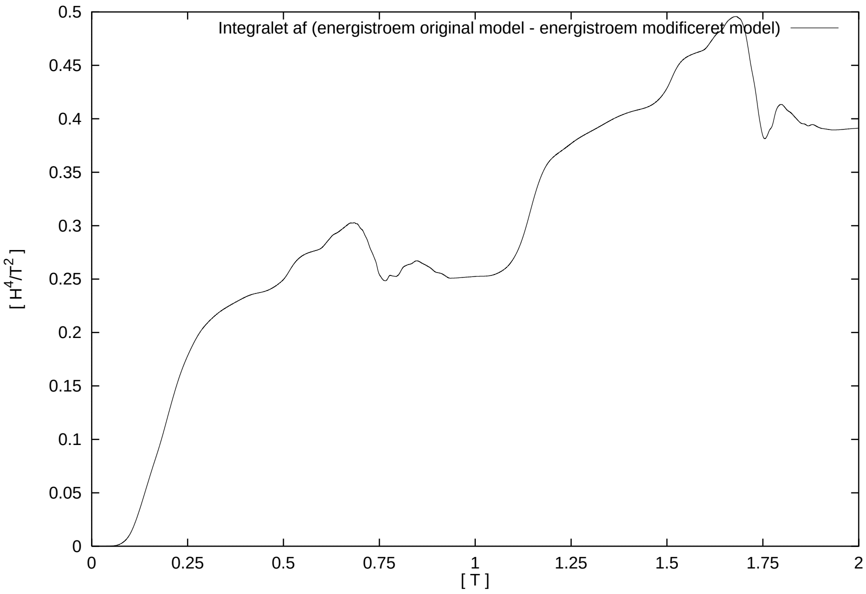


Figur 5.16 Energistrøm ved kilde og dræn pr. tid som funktion af tiden. Den modificerede model.



Figur 5.17 Differensen mellem den originale og den modificerede model i energistrømmen pr. tid ved kilde og dræn som funktion af tiden.

dimension energi. Det vil sige, at integralet viser, hvor meget mere energi der, til ethvert givent tidspunkt, er kommet ind i den originale model end i den modificerede. Som udgangspunkt tyder det altså på, at der "burde" akkumuleres en energiforskel mellem de to modeller, således, at der efter to hjerteslag er i størrelsesordenen $0,4^{H^4}/_{T^2}$ mere energi i den originale model end i den modificerede model.



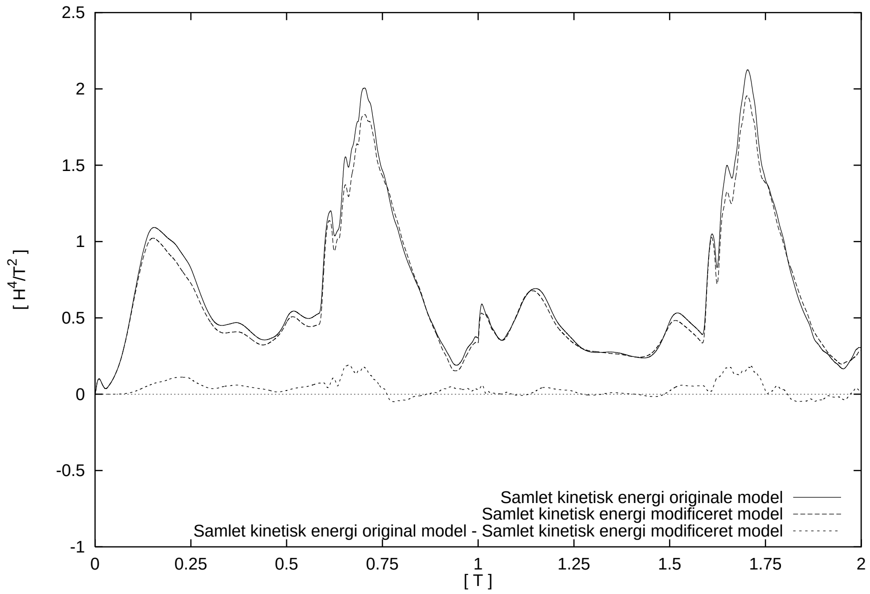
Figur 5.18 Integralet over tid af differensen mellem den originale og den modificerede model i energistrømmen pr. tid ved kilde og dræn som funktion af tiden.

Den samlede kinetiske energi

I figur 5.19 er den samlede kinetiske energi som funktion af tiden plottet for de to versioner af modellen. Endvidere er differensen mellem energien i den originale og den modificerede model plottet. Det ses, som forventet at der generelt er mere kinetiske energi i den originale version af modellen. Det er imidlertid ikke en entydig tendens, idet der til nogen tider, er mere energi i den modificerede version af modellen. Der er endvidere ingen tegn på, at forskellen mellem de to modeller er en akkumulerende effekt, idet den ikke er generelt stigende.

Energidata er altså i overensstemmelse med hastighedsdata, hvor vi heller ikke så en akkumulation af forskellen mellem de to modeller over tid.

I figur 5.20 vises forskellen mellem den samlede energi i de to modeller, sammen med integralet over tid af forskellen i energistrømmen ved kilde og dræn (jvf. figur 5.18) mellem de to modeller. Vores umiddelbare forventning var som



Figur 5.19 Den samlede kinetiske energi som funtion af tiden fra de to modeller, samt differensen mellem disse.

forklaret, at disse to grafer skulle være ens. Man finder imidlertid ikke den forventede voksende tendens i forskellen mellem de totale kinetiske energier.

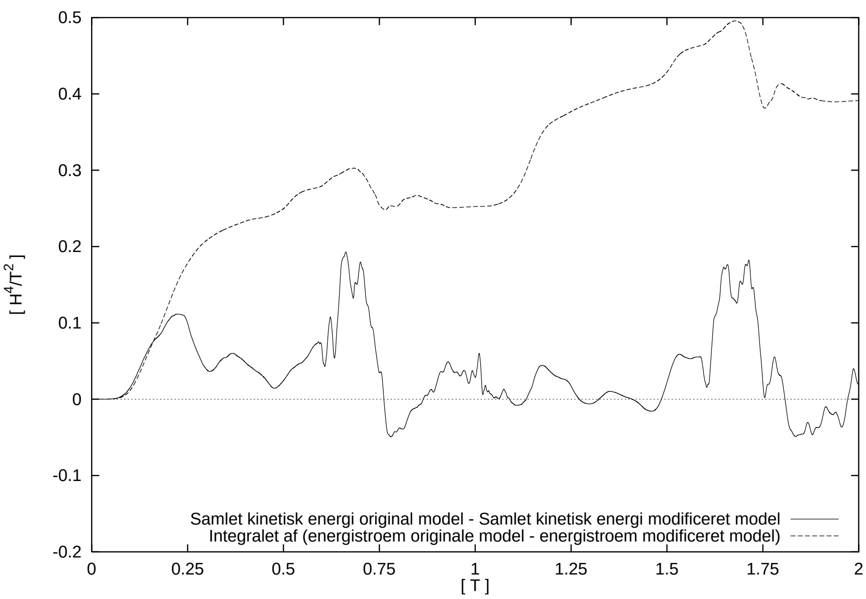
Hvorfor er der cirka den samme mængde energi i de to modeller?

Den oplagte forklaring på, at den samlede kinetiske energi i den originale og den modificerede model ikke er så forskellige, som forskellen mellem energistrømmen ved kilde og dræn indikerer at de "burde" være, er at de andre led i energitilførslen ændrer sig tilsvarende.

Der *er* ændringer i de andre led i sammenlignelige størrelsesordener. I figur 5.21 er der vist, hvordan de fire led, der har betydning for ændringen af den kinetiske energi, hver især bidrager til forskellen mellem den kinetiske energi i de to modeller. Det ses, at tendensen for det viskøse led er, at der dissiperes mere energi i den originale model end i den modificerede.

Det ser endvidere ud til, at den generelle tidslige udvikling og størrelsesordenen af denne forskel udligner de forskelle, der er mellem de to modeller i energistrømmen.

Forskellene mellem de to modeller i randkraften, og kraften ved kilder og dræn er også i samme størrelsesorden som forskellen mellem energistrømmen i de to modeller. For randarbejdet og arbejdet ved kilde og dræn er der endvidere to tydelige tendenser. For det første ses det, at forskellene mellem



Figur 5.20 Integralet over tid af differensen mellem den originale og den modificerede model i energistrømmen pr. tid ved kilde og dræn som funktion af tiden; plottet sammen med differensen mellem den samlede energi i de to modeller som funktion af tiden.

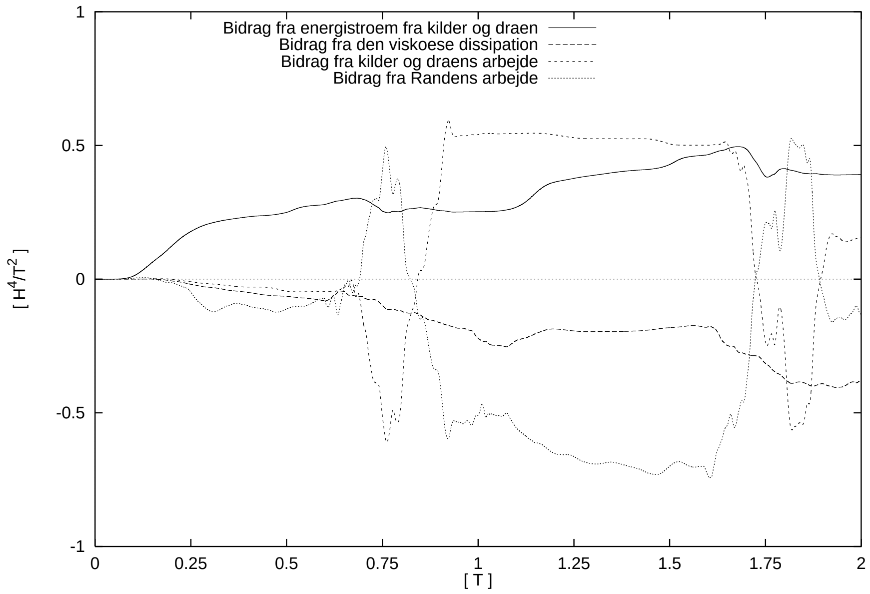
de to modeller er relativt små, idet den faktiske størrelse af disse to led er markant større end den faktiske størrelse af det viskøse led og energistrømmen. For det andet ses det, at de to led ret præcist udligner hinanden.

Summen af de fire kurver fra figur 5.21 vises i figur 5.22 sammen med differensen i den totale kinetiske energi mellem de to modeller. Ideelt set skulle disse to kurver ligge oven i hinanden. Når det ikke helt er tilfældet, skyldes det formodentligt, at værdierne for energiændringerne er beregnet udfra programmets data til hver tid. Således er der, som vist, en fejl, når vi sammenligner den tidsafledte af den samlede kinetiske energi[2] med summen af de fire energiændringsudtryk (jvf. 5.11). Differensen mellem de to kurver i figur 5.22 er altså et resultat af denne fejl.

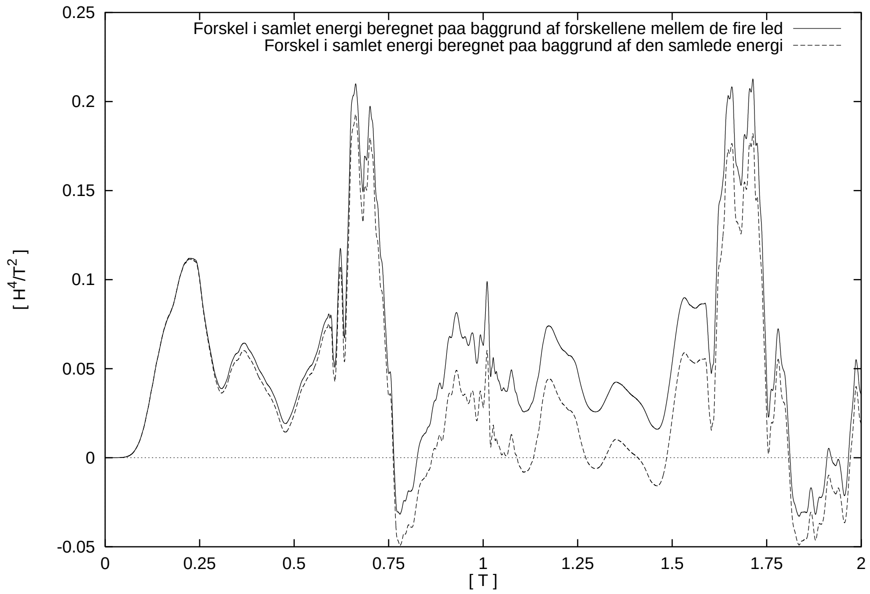
Vi kan altså konkludere, at når vi med modifikationen "tager" kinetisk energi ud af systemet udlignes det ved, at der samlet set tilføres mere energi til systemet[3] via de andre effekter, der har betydning for energien. Specielt ser det ud til, at forskellen mellem den viskøse dissipation i de to modeller modsvarer forskellen mellem energistrømmen i de to modeller.

[2]Denne afledte er selvfølgelig også en vi har regnet diskret ud, men den er fundet dirkete ud fra de hastigheder, der faktisk er i modellen, jvf. afsnit 5.1.2.

[3]Eller fjernes mindre om man vil.



Figur 5.21 Differensen mellem den originale og den modificerede model af integralet over tid af energiændringen pr. tid fra de fire indvirkende effekter.



Figur 5.22 Differensen mellem den samlede kinetiske energi i den modificerede og den originale model; samt differensen mellem de to modeller af summen af integralet over tid af energiændringen pr. tid fra de fire indvirkende effekter.

5.5 Betydningen for den numeriske stabilitet

I dette og det næste afsnit analyseres det om modifikationen af Navier-Stokes ligning i Peskins 2D-hjertemodel, giver anledning til en forbedring (eller forværring) af de praktiske problemer, der blev præsenteret i afsnit 2.1.2. I dette afsnit undersøges det om betydningen af at ændre gammafaktoren er forskellig i de to varianter af modellen. Gammafaktoren er som nævnt flere gange en opskalering af viskositeten (se afsnit 2.3 og 2.1.2), som man anvender for at opnå numerisk stabilitet i modellen.

Til det formål har vi lavet en række kørsler af den originale model med forskellige gammafaktorer. Da en større gammafaktor jo netop ændrer den numeriske stabilitet af systemet er disse kørsler lavet med en finere rumlig og tidslig inddeling. Vi har anvendt følgende opsætninger

gamma $= 0,04$**:** 5616 tidsskridt pr. hjerteslag, 64×64 gitterpunkter

gamma $= 0,125$**:** 22464 tidsskridt pr. hjerteslag, 256×256 gitterpunkter

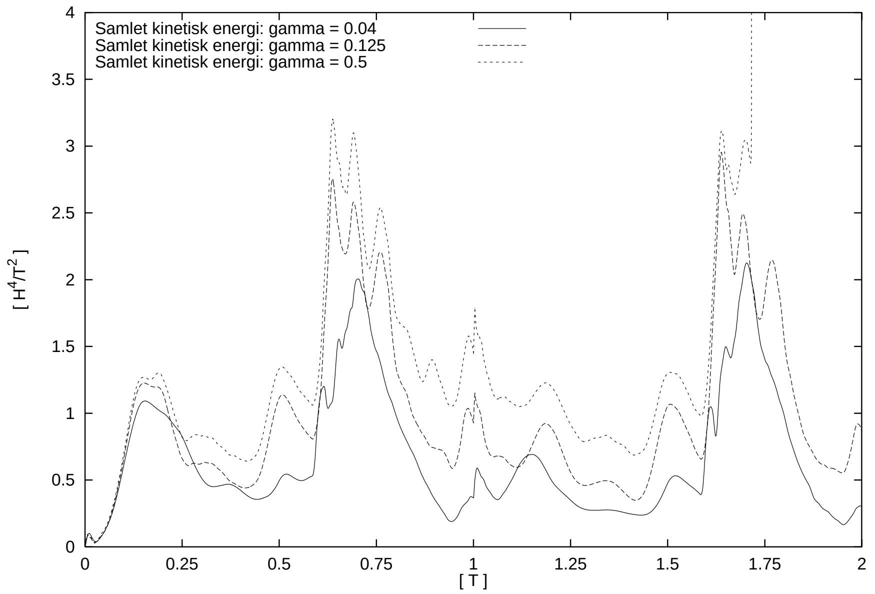
gamma $= 0,5$**:** 29592 tidsskridt pr. hjerteslag, 256×256 gitterpunkter

5.5.1 Gammafaktorens betydning for den samlede kinetiske energi

Indledningsvis ser vi på, hvad gammafaktoren betyder for den originale model. I figur 5.23 ses den samlede kinetiske energi som funktion af tiden for to hjerteslag med henholdsvis gamma $= 0,5$, gamma $= 0,125$ og gamma $= 0,04$. Sidstnævnte er den gammafaktor, der er brugt som standard i de øvrige kørsler, vi præsenterer data fra i denne rapport.

Bemærk at modellen terminerer før det andet hjerteslag er afsluttet ved gamma $= 0,5$. Dette skyldes, at der er indbygget et "nødstop" i programmet, som stopper kørslen, hvis hastighederne bliver for store. Det ses, at den kinetiske energi, har en pludselig voldsom stigning dér, hvor programmet terminerer.

Det ses at med en større gammafaktor får systemet en større kinetisk energi. Således er den maksimale energi ved gamma $= 0,5$ (faregnet, der hvor modellen terminerer) mere end en halv gang større end den maksimale energi ved gamma $= 0,04$. Dette stemmer overens med, at en større gammafaktor giver anledning til en mindre viskositet, hvorved den viskøse dissipation af energi bliver mindre. Det peger endvidere på, at problemet med at opnå numerisk stabilitet for gamma lig (eller tæt på) én, er knyttet til at, der er for meget kinetisk energi i systemet. I foregående afsnit så vi, at der er en forskel på den samlede kinetiske energi mellem de to modeller. Denne er dog noget mindre end den forskel der er mellem energierne for de forskellige værdier af gamma. Det er derfor ikke oplagt, at modifikationen af modellen vil afhjælpe problemet med stabiliteten.



Figur 5.23 Den samlede kinetiske energi som funktion af tiden. Den originale model kørt med tre forskellige gammafaktorer.

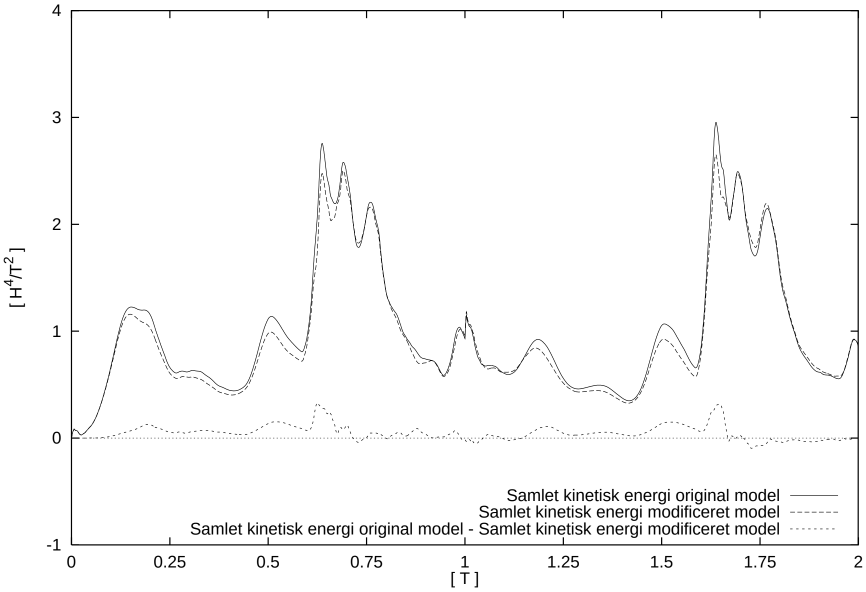
5.5.2 Modifikationens betydning ved forskellige gammafaktorer

For nærmere at undersøge modifikationens betydning for stabiliteten har vi lavet et par modelkørsler med den modificerede model ved forskellige gammafaktorer. De tidslige og rumlige inddelinger er som angivet på side 73. På figur 5.24 og 5.25 ses den samlede energi for den modificerede model og den originale model for henholdsvis gamma $= 0,125$ og gamma $= 0,5$.

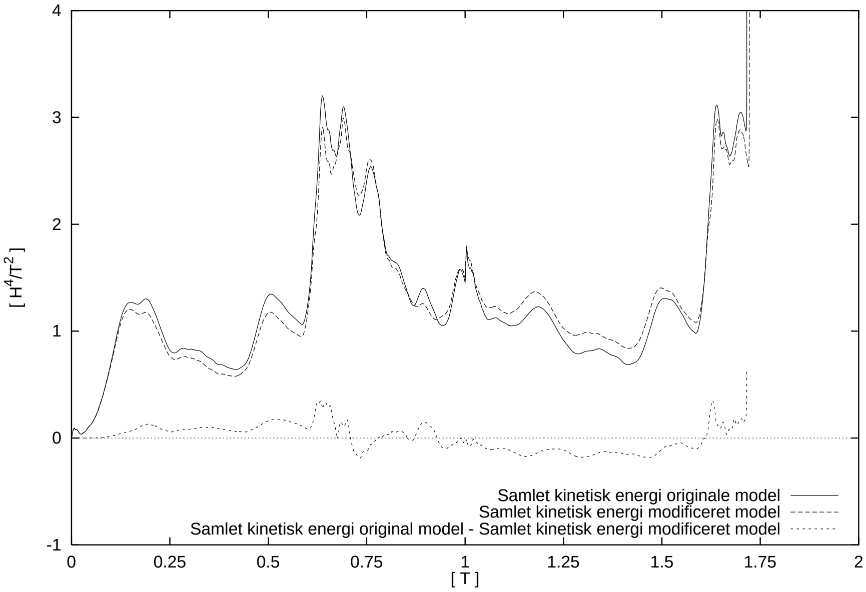
Der ses ingen markante forskelle i den totale energi mellem de to modeller ved hverken gamma $= 0,125$ eller ved gamma $= 0,5$. Ved gamma $= 0,125$ ses der, som tidligere observeret, en svag tendens til, at der er mere energi i den originale end den modificerede model, mens denne tendens ikke genfindes ved gamma $= 0,5$.

Ved gamma $= 0,5$ ses, at den modificerede model terminerer senere end den originale. Der er dog tale om en forskel, der er så lille (ganske få tidsskridt) at det ikke kan ses som nogen egentlig forbedring, men snarere som en tilfældig forskel.

Det øger altså ikke stabiliteten af Peskins 2D-hjertemodel at anvende den modificerede Navier-Stokes ligning.



Figur 5.24 Den samlede kinetiske energi som funktion af tiden for gamma $= 0,125$; Den modificerede og den originale model plottet sammen.



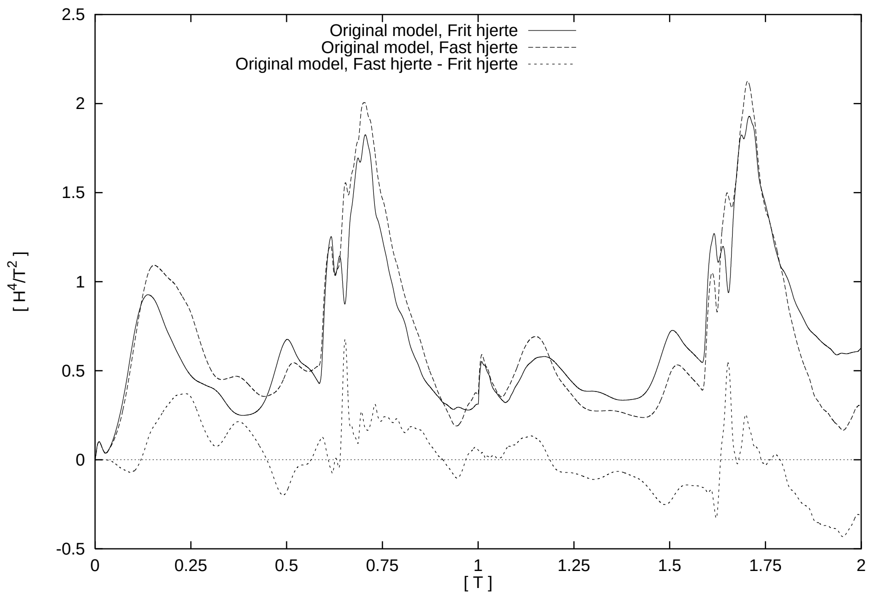
Figur 5.25 Den samlede kinetiske energi som funktion af tiden for gamma $= 0,5$; Den modificerede og den originale model plottet sammen.

5.6 Undersøgelse af randens bevægelse

Som beskrevet i afsnit 2.1.2 er et af de praktiske problemer med modellen, at randen bevæger sig meget rundt. I dette afsnit vil vi analysere, om det har nogen betydning for dette problem, at man anvender den modificerede model (og altså benytter den modificerede Navier-Stokes ligning) frem for den originale model. Alle data i dette afsnit bygger på modelkørsler med 5616 tidsskridt pr. hjerteslag og 64×64 gitterpunkter.

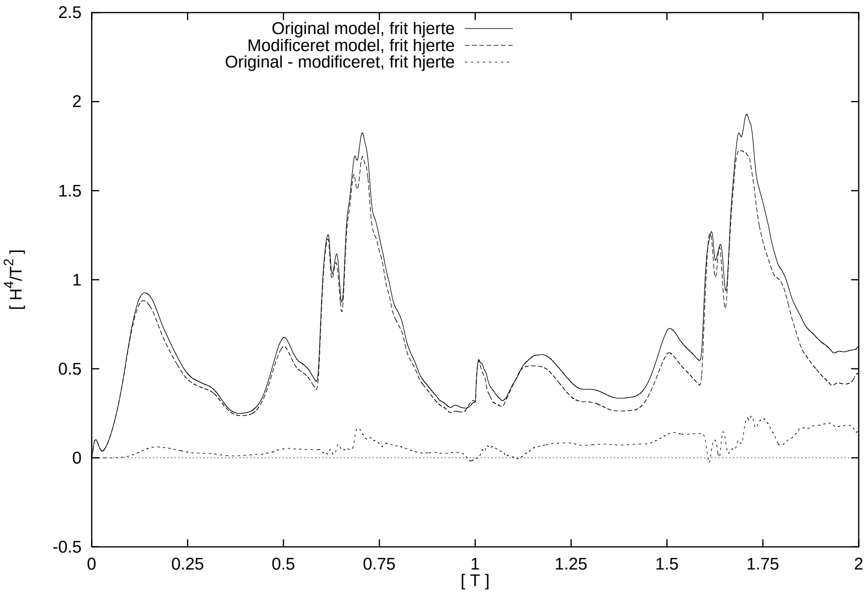
5.6.1 Total kinetisk energi

Først vil vi se på, hvordan den totale energi i den originale model ændrer sig alt efter om man holder hjertet fast eller lader det bevæge sig frit i beregningsdomænet. Figur 5.26 viser den totale energi i de to versioner af modellen, sammen med differensen mellem disse. Det ses, at der ikke er noget entydigt svar på i hvilken situation, der er mest energi, men den generelle tendens er, at der er mest energi i den model, hvor hjertet er spændt fast. Det ser altså ikke umiddelbart ud til, at hjertet bevæger sig rundt i domænet, fordi der er for meget kinetisk energi i systemet.



Figur 5.26 Den totale kinetiske energi i den originale model som funktion af tiden. Vist for henholdsvis modellen med fastholdt og frit hjerte, samt differencen mellem disse to.

I figur 5.27 er den totale energi for den originale model plottet sammen med tilsvarende for den modificerede model, endvidere ses differencen mellem disse to energier. Det ses, at der er en tendens til, at der er mere energi i den



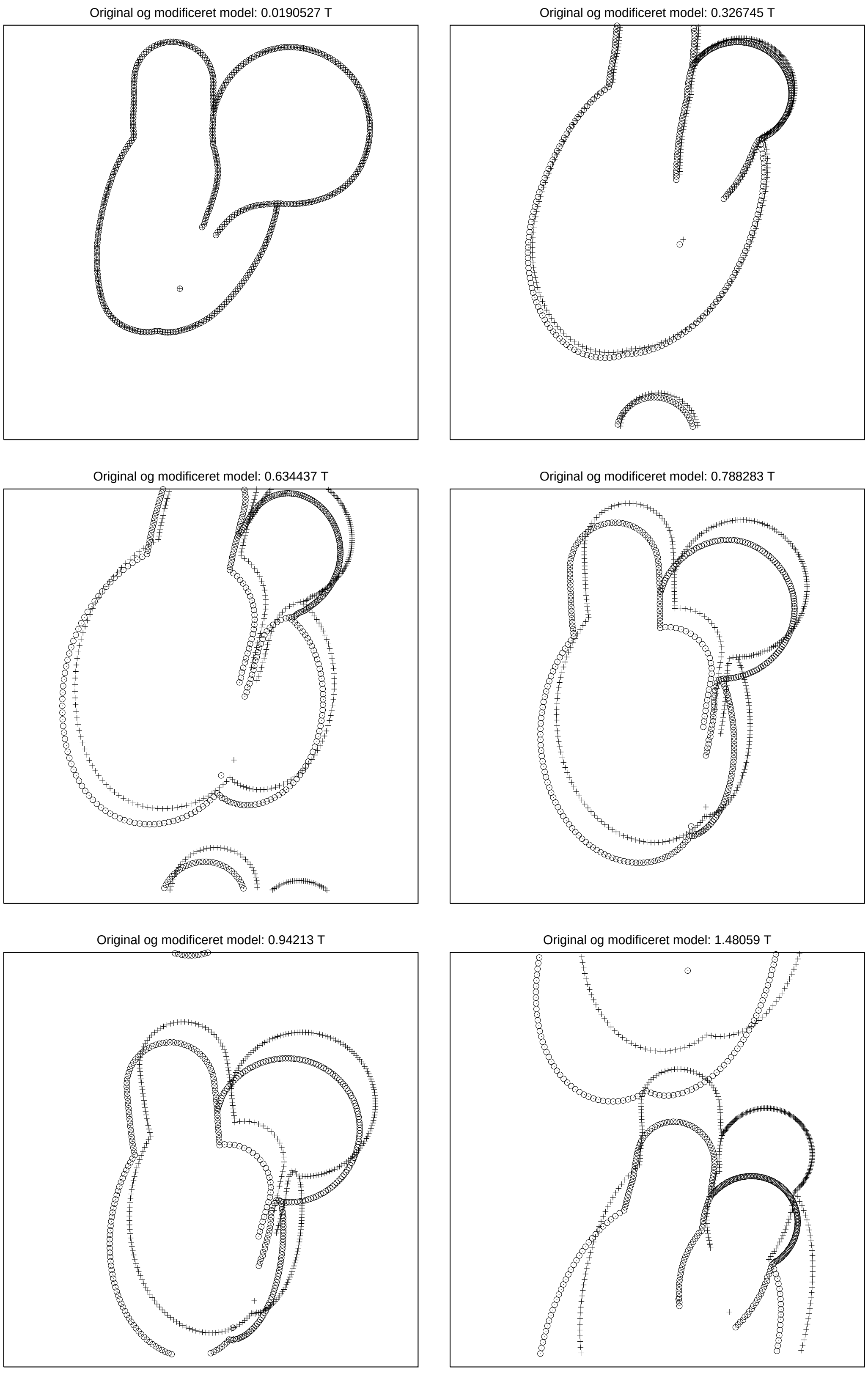
Figur 5.27 Den totale kinetiske energi i modellen. Vist for henholdsvis den originale og den modificerede model, begge med frit hjerte.

originale model end i den modificerede, hvilket er i overensstemmelse med tidligere resultater. Det ser ud til at forskellen i den totale kinetiske energi mellem den originale og den modificerede model har en svag akkumulerende tendens. Dette er i modsætning til resultatet for det fastholdte hjerte, hvor denne effekt ikke genfindes.

5.6.2 Randens bevægelse

Afslutningsvis vil vi se på, hvordan randen bevæger sig rundt ved henholdsvis den originale og den modificerede model. På figur 5.28 er vist de to randes position til seks forskellige tidspunkter fordelt over to hjerteslag. Det ses, at der er en forskel i randens bevægelsesmønster i de to modeller. I starten af første hjerteslag, bevæger begge hjerterande sig lidt opad, men i den modificerede model bevæger randen sig mere end i den originale. Mod slutningen af første hjerteslag og igennem det andet hjerteslag bevæger hjerteranden i den originale model sig imidlertid voldsomt nedaf, mens hjerteranden i den modificerede model har en tilsvarende men mere moderat bevægelse.

Der er således en tendens til, at hjertet bevæger sig mindre rundt i den modificerede end i den originale model, men der er ikke tale om nogen markant forskel. I forhold til dette problem, er der er altså ingen oplagt fordel ved at benytte den ene model frem for den anden.



Figur 5.28 Randens bevægelse i løbet af det første hjerteslag. Cirkler markerer den originale model, krydser markerer den modificerede model. Bemærk at der ikke er lige lang tid mellem de forskellige udvalgte vektorplots.

6 Opsamling og diskussion

Vi vil i dette kapitel opsamle og diskutere de resultater, vi har præsenteret gennem rapporten.

Det oprindelige teoretiske problem i forbindelse med Peskins 2D-hjertemodel var, at ingen havde overvejet, hvordan kilder og dræn indvirker på impulsregnskabet og dermed på bevægelsesligningen. Peskin har givet et forslag til et sæt af forudsætninger, som giver en konsistent matematisk beskrivelse af impulsen ved kilder og dræn i modellen. Disse forudsætninger fører til den bevægelsesligning, som i denne rapport omtales som den modificerede Navier-Stokes ligning. Denne ligning er forskellig fra den bevægelsesligning, der hidtil er blevet anvendt i modellen[1]. Det var derfor ikke klart, om der var matematisk/fysisk inkonsistens i den oprindelige models formulering.

I forbindelse med opsætningen af sine forudsætninger regner Peskin på ændringen af den kinetiske energi i systemet, og han viser, at der i det modificerede system forsvinder kinetisk energi ved både kilder og dræn. Hastighederne ved aorta er meget store, og en eventuel forkert behandling her vil derfor kunne føre til stor ophobning af kinetisk energi i systemet. Derfor var den største bekymring omkring den originale model, at der måske ikke blev taget højde for energi og impuls af den væske, som forsvinder ud af aortadrænet.

Vi har i kapitel 3 vist, at der ikke er nogen matematisk eller fysisk inkonsistens i den oprindelige formulering af modellen. Det har vi gjort ved at vise, at det er muligt at opstille et meningsfuldt sæt af forudsætninger, som fører til den originale Navier-Stokes ligning.

Den eneste forskel mellem de to sæt af forudsætninger er, at man i Peskins version antager, at væsken kommer ind i hjertet med hastighed nul, mens man i de af os opstillede forudsætninger antager, at væsken kommer ind i hjertet med en hastighed, som svarer til hastigheden ved kilden.

Vi har endvidere beregnet, hvordan hvordan ændringen af kinetisk energi foregår i den originale version af modellen. Ved sammenligning med de tilsvarende resultater for den modificerede model er vi nået frem til, at den eneste forskel findes der, hvor væsken kommer ind i hjertet. Dette er naturligvis en direkte konsekvens af, at det kun er ved kilden, at der er forskel i forudsætningerne. Det betyder, at ved aortadrænet forsvinder den kinetisk energi i den originale såvel som i den modificerede model.

[1] Den bevægelsesligning, som i rapporten benævnes den originale Navier-Stokes ligning

Forskellen i energiregnskabet er således kun, at i den originale formulering af modellen tilfører den indstrømmende væske energi til systemet, og i den af Peskin opsatte formulering dissiperes der energi i forbindelse med samme.

Interessen i de teoretiske problemer med Peskins 2D-hjertemodel bundede til dels i to praktiske problemer, som kunne have relation til, at der er for meget kinetisk energi i systemet, hvilket en forkert behandling af impulsen ved aorta-dræner netop kunne føre til. De praktiske problemer er for det første at modellen er numerisk ustabil, hvis viskositeten ikke opskaleres unaturligt, og for det andet at hjerteranden bevæger sig ufysiologisk rundt i domænet (jvf. afsnit 2.1.2). At der ikke er forskel mellem den modificerede og den originale model, i forbindelse med behandlingen af impuls og energi ved aortodrænet, peger selvfølgelig i retningen af, at der ikke er så stor forskel mellem energierne i modellerne som frygtet. De af Peskin opstillede forudsætninger fører imidlertid til, at der dissiperes energi ved kilderne, hvor de af os opstillede forudsætninger (svarende til den originale model) fører til, at der tilføres energi ved kilderne. På trods af, at forskellen kun findes omkring kildeområder, kan man altså ikke teoretisk afvise, at anvendelsen af den modificerede Navier-Stokes ligning i modellen, vil nedsætte energien i systemet, og dermed muligvis afhjælpe de praktiske problemer. For at kunne undersøge dette, samt for generelt at analysere, hvilken betydning det har, om man benytter den ene eller anden version af modellen, har vi implementeret den modificerede Navier-Stokes ligning i den numeriske løsningsalgoritme[2].

Vi har samtidig implementeret en numerisk beregning af de teoretisk udledte udtryk for ændringen af den kinetiske energi i systemet, hvilket har givet mulighed for at analysere, hvordan energien ændrer sig over tid. Disse energiberegninger har vi anvendt til at studere forskelle mellem de to versioner af modellen. Endvidere har de givet os mulighed for at vurdere om de praktiske problemer i modellen faktisk er relaterede til for meget kinetisk energi i modellen.

Analysen af resultaterne fra de to versioner af modellen viser at modifikationen af Navier-Stokes ligning ikke har markant betydning for modellens resultater. Af data ses endvidere, at hastighederne ved kilderne generelt er relativt små. Det betyder at forskellen mellem de to sæt antagelser i praksis ikke bliver ret stor, idet forskellen ligger i, om man antager, at væsken strømmer ind med en lille eller slet ingen hastighed i modelplanet. Derfor er det altså ikke umiddelbart underligt, at forskellen mellem modellernes resultater er lille.

Der er en svag tendens til, at der samlet er mere kinetisk energi i den original model, hvilket også var hvad vi teoretisk havde forudsagt, men denne tendens er mindre end vi umiddelbart havde ventet. Årsagen til at der ikke er markant forskel i mængden af kinetisk energi mellem de to modeller er, at den kinetiske energi, som kommer fra kilden i den originale formulering bliver udbalanceret af andre af de indgående energiled. Specielt ser det ud til, at en større viskøs

[2] I praksis har vi lavet ændringen i det computerprogram som modellen er implementeret i.

dissipation modsvarer, at der kommer mere kinetisk energi ind i den originale model.

Kvalitativt er der heller ikke stor forskel på væskens strømningsmønster i de to versioner af modellen. Gennem en hjertecyklus ses dog nogle forskelle mellem de to modeller. Forskellene starter ved kilden og breder sig derefter til resten af systemet. Mod slutningen af hjerteslaget dør forskellene imellem de to modeller imidlertid ud, og der er altså heller ikke her tale om en ophobende effekt.

Vi har udover de generelle resultater fundet, at det ikke har nogen entydig effekt på de omtalte praktiske problemer, om man benytter den ene eller anden Navier-Stokes ligning.

Ud fra energidata kan vi se at en mindre viskositet, hvilket altid medfører at systemet er mere numerisk ustabilt, samtidigt medfører, at der er mere kinetisk energi i systemet. Dette peger på at ustabiliteten kan være relateret til, at der er for meget kinetisk energi i systemet. Modifikationen sænker ikke energien af systemet markant, hvilket peger på at den ikke kan afhjælpe problemet med den nummeriske stabilitet. Vi har endvidere lavet en enkel kørsel der terminere og her ses stort set ingen forskel mellem tidspunktet for termineringen mellem den origininale og den modificerede model. Dette peger igen på at modifikationen er uden afgørende betydning for stabiliteten.

Ved de fleste af de modelkørsler vi har foretaget, har hjertet været fastspændt. Når hjertet lades være frit, betyder modifikationen af modellen at hjertet bevæger sig anderledes rundt end i den originale model, men der er ikke nogen nævneværdig reduktion i hvor meget. Ved at sammenligne energien af de systemer, hvor hjertet ikke er fastspændt med dem hvor det er, har vi set, at der ikke er mere energi i modellen, når hjertet er frit, end når det er fastspændt. Det betyder, at bevægelsen af hjertet næppe er et resultat af, at der er for meget kinetisk energi i systemet. Vi har i den forbindelse overvejet i hvor høj grad, det er et reelt problem for Peskins 2D-hjertemodel, at hjertet bevæger sig rundt, når det ikke holdes fast. Hjertet i kroppen holdes jo netop fast, og vi kan ikke umiddelbart se, at hjerterandens bevægelse er et resultat af et overordnet problem i modellen. En nærmere fysiologisk diskussion af dette ligger imidlertid langt udenfor rammen af denne rapport.

7 Konklusion

Vi konkluderer, at der ikke er teoretisk eller praktisk grund til at anvende den modificerede Navier-Stokes ligning frem for den originale Navier-Stokes ligning i Peskins 2D-hjertemodel.

Vi har været i stand til at opstille et sæt af meningsfulde forudsætninger, som fører til den for modellen originale formulering af Navier-Stokes ligningen, og dermed har vi afvist, at der skulle være matematiske eller fysiske inkonsistenser i opbygningen af den originale model. Det er på denne baggrund, at vi konkluderer, at der ikke er nogen teoretisk grund til at benytte den modificerede Navier-Stokes ligning.

Vi konkluderer desuden, at forskellen mellem den originale og den modificerede model udelukkende ligger i, hvilke forudstæninger man har, omkring hastigheden af den væske som kommer ind i modellen fra kilderne. Antager man, at den væske som kommer fra kilden har samme hastighed, i modelplanet, som den omliggende væske, fører det til den originale formulering af modellen. Antager man derimod at væsken, som kommer fra kilden, har hastighed nul i modelplanet, når man frem til den modificerede formulering af modellen.

Baggrunden for at afvise, at der er praktiske grunde til at benytte den modificrede Navier-Stokes ligning er, at vi på ud fra modelkørsler med begge versioner af modellen har konstanteret, at brugen af den modificerede Navier-Stokes ligning ikke medfører markante ændringer i modellens resultater.

Et aspekt, som ligger ud over dette projekts formål, er at diskutere, om der er fysiologiske grunde til at vælge den ene frem for den anden version af modellen. De fortolkningsrammer, der opstilles igennem denne rapport, specielt i forhold til tolkningen af den originale model, kan forhåbentligt være med til at kvalificere en sådan diskussion.

Kildehenvisninger

Adeler, P. T. & Jacobsen, J. M. [2000]. Blood flow in the heart. Kapitel fra den kommenden bog: Mathematical Models in Physiology, for information om denne bog kontakt BioMath-Gruppen, IMFUFA, RUC.

Andersen, G., Hilmer, J. & Weisbjerg, S. [2000]. Matematisk modellering af hjertefunktionen, *Tekst 380*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Archeson, D. J. [1990]. *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press Inc.

Batchelor, G. K. [1967]. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

Eklund, J. [1994]. Charles S. Peskin and David M. McQueen interview. Publiceret online af: Division of Computers, Information & Society, National Museum of American History.
URL: *http://www.si.edu/resource/tours/comphist/peskin.htm*

Griebel, M., Dornseifer, T. & Neunhoeffer, T. [1998]. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics*, SIAM.

Jacob Morten Jacobsen [2000]. Personlig kommunikation. IMFUFA, RUC.

Jesper Larsen [2000]. Personlig kommunikation. IMFUFA, RUC & Math-Tech.

Page, C. G. [1995]. *Professional Programmer's Guide to Fortran 77*, University of Leicester, UK. Bogen er i 1988 udgivet på forlaget Pitman, men er udgået fra forlaget. Den findes i en opdateret udgave på forfatterens hjemmeside.
URL: *http://www.star.le.ac.uk/ cgp/*

Peskin, C. S. [1972a]. *Flow patterns around heart valves*, PhD thesis, Albert Einstein College of Medicine, Yeshiva University.

Peskin, C. S. [1972b]. Flow patterns around heart valves: A numerical method, *Journal of computational physics* **10**: 252–271.

Peskin, C. S. [1977]. Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of computational physics* **25**: 220–252.

Peskin, C. S. [1998]. Incompressible fluid dynamics with distributed sources and sinks. Upubliceret notat.

Researcher Profiles: Charles S. Peskin and David M. McQueen, Courant Institute of Mathematical Sciences [1995]. *SDSCwire: Current news for the SDSC community* **1**(8). Online tidsskrift.
URL: *http://www.sdsc.edu/SDSCwire/v1.8/2017.peskin.html*

Thorup, P. [1997]. *Hemodynamic modelling of the heart*, Master's thesis, DTU, ISVA.

Warberg, J. [1995]. *Human fysiologi, En grundbog*, Polyteknisk Forlag.

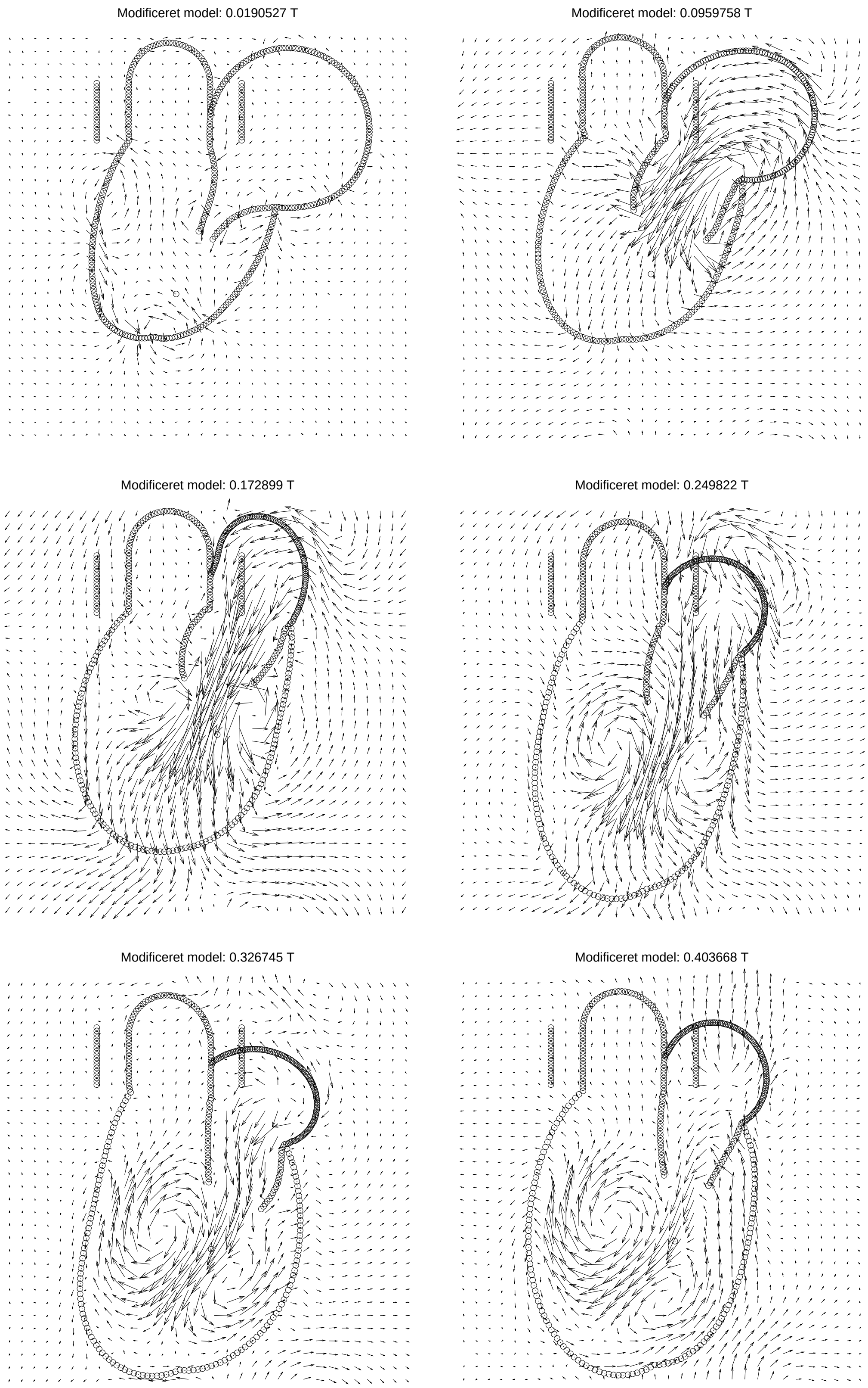
A Hastighedsfelter

Figur A.1 og A.2 viser hastigehedsfelter for den modificerede model.

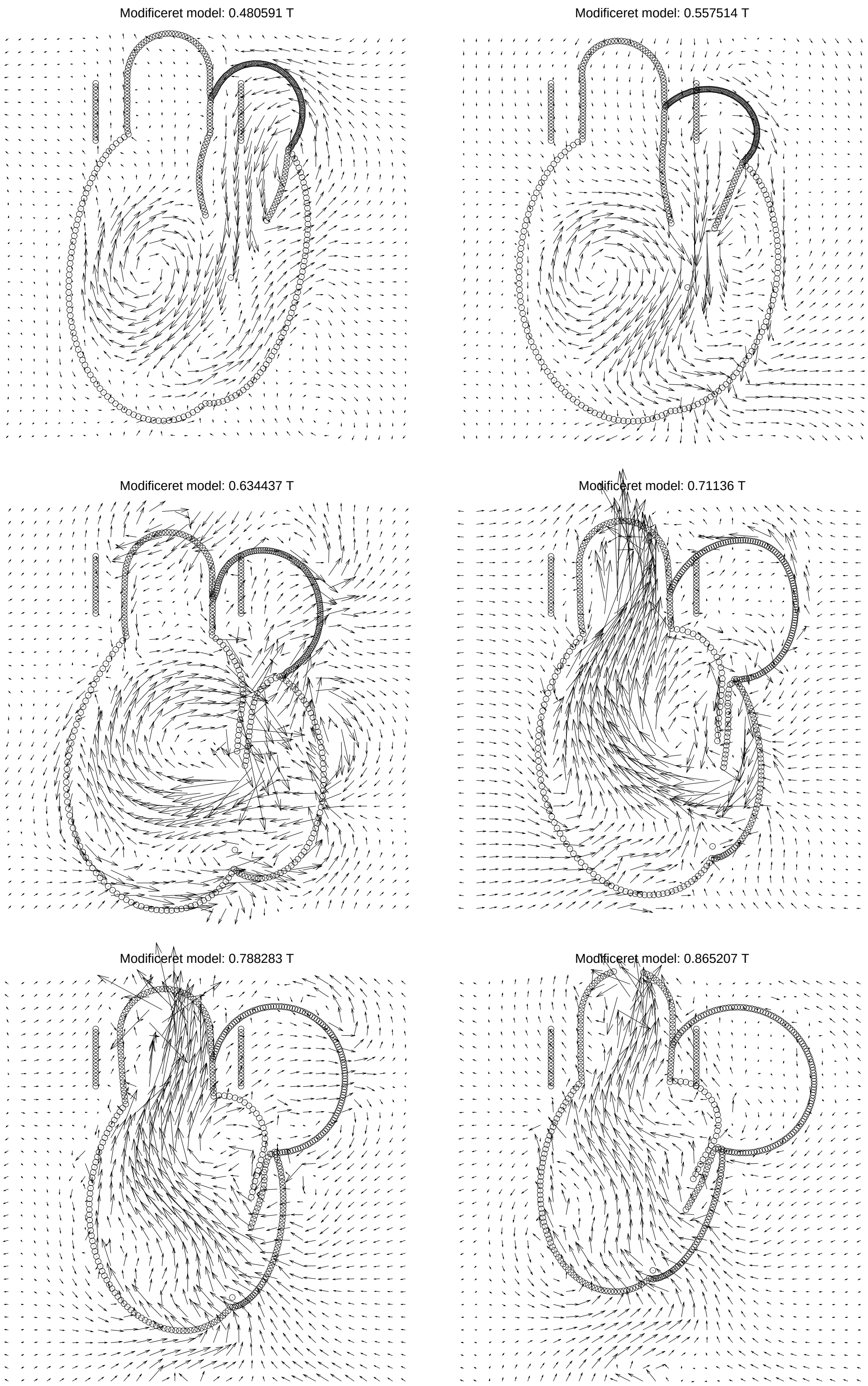
- Et hjerteslag
- 5616 tidsskridt pr. hjerteslag
- 64×64 gitterpunkter
- Gammafaktor $0,04$

Figur A.3 og A.4 viser differensen mellem hastigehedsfeltet for den originale og den modificerede model. Sammen med differenserne vises randen fra den originale model.

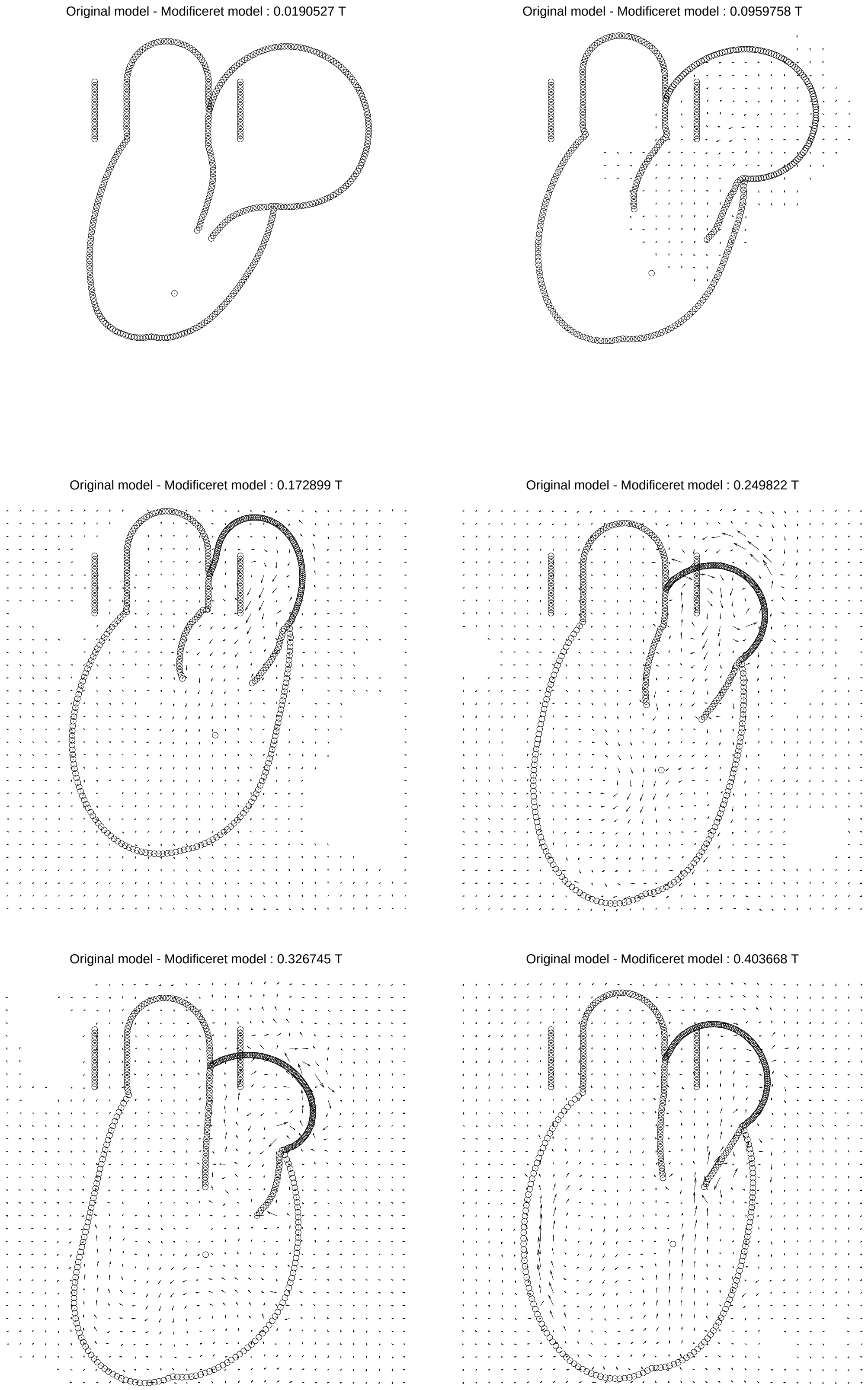
- Et hjerteslag
- 5616 tidsskridt pr. hjerteslag
- 64×64 gitterpunkter
- Gammafaktor $0,04$



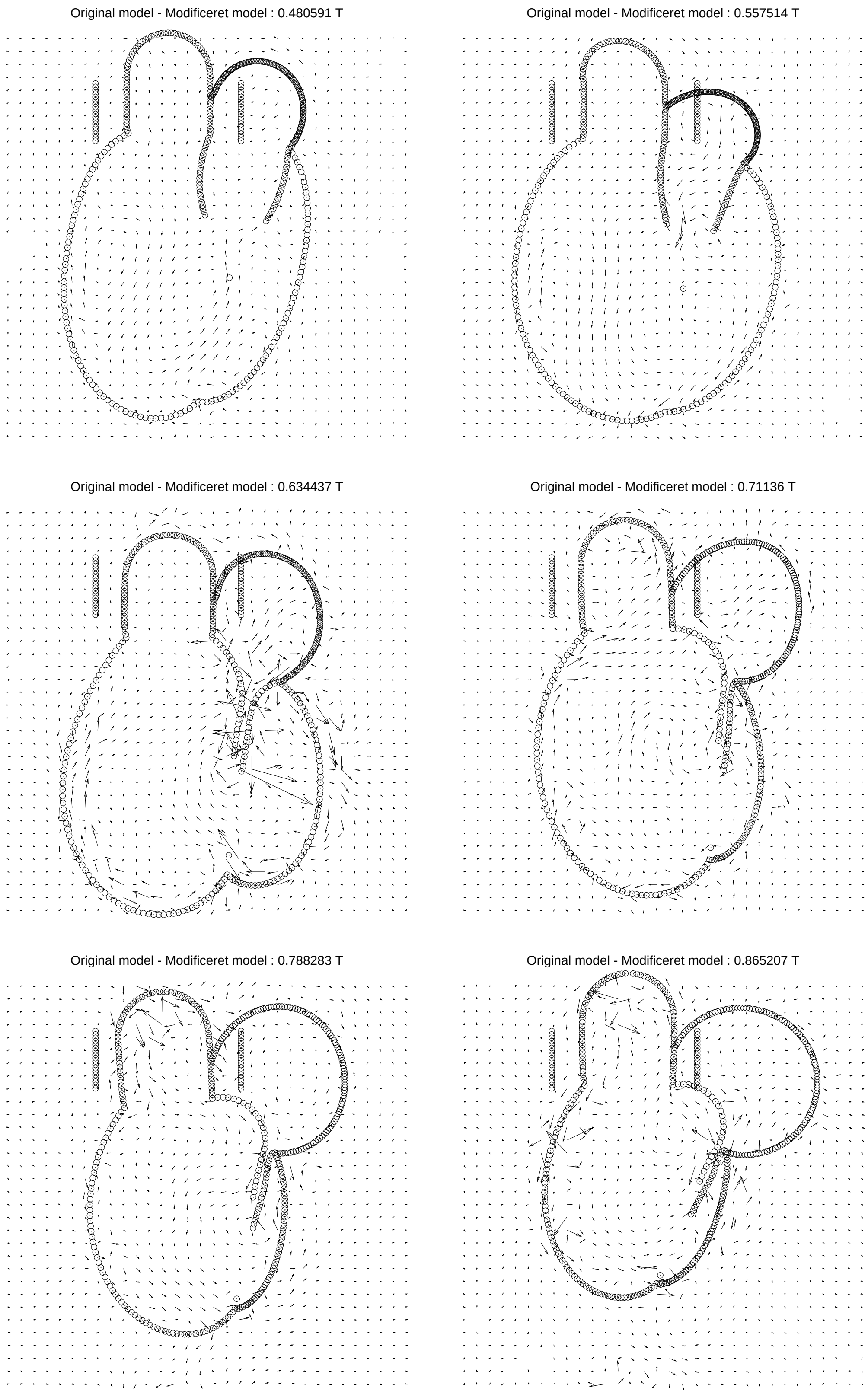
Figur A.1 Første halvdel af første hjerteslag i den modificerede model. Se side 87 for kørslens parametre.



Figur A.2 Anden halvdel af første hjerteslag i den modificerede model. Se side 87 for kørslens parametre.



Figur A.3 Differensen mellem den originale og den modificerede models vektorfelter; første halvdel af første hjerteslag. Se side 87 for kørslernes parametre.



Figur A.4 Differensen mellem den originale og den modificerede models vektorfelter; anden halvdel af første hjerteslag. Se side 87 for kørslernes parametre.

B Matematiske notationer

B.1 Summationskonventionen

I projektet anvendes Einsteins summationskonvention i forbindelse med impuls- og energiberegningerne. Det vil sige, at der implicit forståes, at der skal summeres over indeks, der optræder to gange i et led. Indekset vil altid henvise til, hvilken komposant af en tensor, vektor eller vektordifferensoperator, der er tale om, og da vi arbejder i to dimensioner, betyder det at der blot skal summeres over $\{1, 2\}$.

Hvis $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ er to vilkårlige vektorfunktioner giver det for eksempel at

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i \qquad \text{og} \qquad u_i \frac{\partial u_j u_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} u_i \frac{\partial u_j u_j}{\partial x_i}$$

Vi bruger summationskonventionen sammen med vektornotation, og laver derfor af og til følgende omskrivninger

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u_i v_i \quad \text{og specielt} \quad |\mathbf{u}|^2 = u_i u_i$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{samt} \quad \nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

B.2 Integraler

Generelt skrives randintegralet af en funktion $f(x, y)$ langs en lukket kurve l som

$$\int_l f\, dl$$

og tilsvarende skrives overflade integralet over fladen A som

$$\int_A f\, dA$$

Vi har aldrig behov for at udføre randintegraler i praksis, mens vi i forbindelse med energiberegningerne skal integrere over et areal. Der er imidlertid altid tale om det pæne plane kvadratiske beregningsdomæne Ω, med sidelængden H, således at vi kan lave følgende omskrivning

$$\int_{\Omega} f \, dA = \int_0^H \int_0^H f \, dx_1 \, dx_2$$

B.3 Ombytning af integrationsrækkefølgen

I kapitel 4 ombytter vi ved flere lejligheder integrationsrækkefølgen, med henblik på at få en differentiation og en integration til at ophæve hinanden. Det kan desværre forekomme lidt ugennemsigtigt sammen med den iøvrigt praktiske summationskonvention. Derfor viser vi her et eksempel på, hvad der foregår.

$$\begin{aligned}
&\int_0^H \int_0^H \frac{\partial(u_j u_i) u_i}{\partial x_j} \, dx_1 \, dx_2 = \\
&\quad \int_0^H \int_0^H \frac{\partial(u_1 u_1) u_1}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 + \int_0^H \int_0^H \frac{\partial(u_1 u_2) u_2}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 + \\
&\quad \int_0^H \int_0^H \frac{\partial(u_2 u_1) u_1}{\partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 + \int_0^H \int_0^H \frac{\partial(u_2 u_2) u_2}{\partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 = \\
&\qquad \int_0^H \int_0^H \left(\frac{\partial(u_1 u_1) u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1 u_2) u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \, dx_2 + \\
&\qquad \int_0^H \int_0^H \left(\frac{\partial(u_2 u_1) u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_2 u_2) u_2}{\partial x_2} \right) dx_2 \, dx_1 = \\
&\qquad\quad \int_0^H \Big[(u_1 u_1) u_1 + (u_1 u_2) u_2 \Big]_0^H \, dx_2 + \\
&\qquad\quad \int_0^H \Big[(u_2 u_1) u_1 + (u_2 u_2) u_2 \Big]_0^H \, dx_1 = \\
&\qquad\qquad\qquad \int_0^H 0 \, dx_2 + \int_0^H 0 \, dx_1 = 0
\end{aligned}$$

Hvor nullerne følger af de periodiske randbetingelser (jvf. afsnit 2.2.1).

C Hjertets anatomi

Dette appendiks giver en kort oversigt over hjertets fysiologi og pumpecyklus. Teksten er udarbejdet med udganspunkt i Warberg [1995].

Hjertet består af to hjertehalvdele, der udover muskulaturens tykkelse er meget tæt på ens. Venstre hjertehalvdel pumper det iltede blod fra lungerne ud i kroppen og højre hjertehalvdel pumper det afiltede blod fra kroppen ud i lungerne.

C.1 Ordliste

atrium: forkammer (atrierne: atrium i flertal)

ventriklen: hovedkamme

vene: åre, der kommer til hjertet

aorta: åren, der forlader den venstre hjerte halvdel

arterier: årer der forlader hjertet

diastole: afslapningsfasen, hjertet fyldes

systole: kontraktion

mitralklappen (AV-klappen): klappen mellem atrium og ventriklen (den man normalt omtaler som hjerteklappen)

aortaklappen: klappen mellem ventriklen og aorta

C.2 En hjertecyklus

Mod slutning af diastolen: Mitralklapperne er åbne, og ventriklen fyldes passivt med blod fra atrium grundet en tryk forskel.

Atriesystolen: Atrium trækker sig sammen, og der presses yderligere en mængde blod ned i ventriklen.

Ventrikelsystolen, anspændingsfase: Sammentrækning af hjertet, trykket i ventriklen stiger til over trykket i atrium og mitralklappen lukker. Under fortsat sammentrækning stiger trykket i ventriklen op over trykket i aorta og aortaklappen åbner.

Ventrikelsystolen,uddrivningsfasen: Ventriklen pumper blod ud i aorta.

Diasatolen: ventrikelmuskulaturen afslappes og trykket i ventriklen falder under trykket i aorta, derved lukkes aortaklappen. Begge klapper er lukkede indtil trykket i ventriklen er faldet under trykket i atrium, hvorved mitralklappen åbnes.

D Den tilnærmede deltafunktion

I Peskins 2D-hjertemodel anvendes en tilnærmet version af deltafunktionen (jvf. afsnit 2.4.4). I Thorup [1997] bevises følgende egenskaber for den tilnærmede deltafunktion, for at godtgøre, at det er et fornuftigt valg.

1. Deltafunktionen er en lige funktion, det vil sige
$$\delta_h(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$
2. For et vilkårligt punkt $\mathbf{X}_a$ (altså ikke nødvendigvis et gitterpunkt) gælder det at
$$\sum_{i,j} h^2 \delta_h(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{X}_a) = 1$$
hvor der summeres over hele domænet. Dette har samme betydning som at den normale deltafunktion integrerer til en.
3. Der gælder for en vilkårlig funktion $\varphi_{i,j}$ at
$$\lim_{h \to 0} \sum_{i,j} h^2 \delta_h(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{X}_a) \varphi_{i,j} = \varphi(\mathbf{X}_a)$$
hvilket i grænsen $h \to 0$ svarer til følgende egenskab ved den normale 2D deltafunktion.
$$\int_{\mathbf{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_a) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}_a)$$
4. Det gælder at
$$\delta_h(\mathbf{x}) = 0 \text{ for } |\mathbf{x}| \geq 2h$$
hvilket i grænsen $h \to 0$ svarer til kravet til den normale deltafunktion om at
$$\delta(\mathbf{x}) = 0 \text{ for } \mathbf{x} \neq 0$$
5. $\delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_a)$ er en kontinuert funktion i $\mathbf{X}_a$ for et fast gitterpunkt $\mathbf{x}$. Denne sidste egenskab er speciel for denne tilnærmelse af deltafunktion og genfindess ikke hos den normale Dirac deltafunktion.

E Implementering af ændringer i computerprogrammet

E.1 Generelt om implementeringen

Det konkrete computerprogram hvor modellen er implementeret er et `Fortran 77` [1] program. Vi har i forbindelse med dette projekt fået kildekoden stillet tilrådighed af Pernille Thorup Adeler.

I dette appendiks vil vi præsentere de vigtigste af de ændringer og tilføjelser, som vi har foretaget i kildekoden. Dette skal ikke ses som en fyldestgørende kodedokumentation men blot som en mulighed for at se, hvordan vi konkret regner de forskellige størrelser ud.

Udover de her beskrevne ændringer har vi tilføjet en del forskellige datafiler med tilhørende output rutiner.

I afsnit E.2 præsenteres de dele, som er relaterede til ændringen af Navier-Stokes ligning. I afsnit E.3 præsenteres de dele, som er relaterede til beregning af den kinetiske energi.

E.1.1 Præsentation af nogle vigtige variabel

Programmet benytter sig i stor udstrækning af såkaldte `COMMON` blokke som er en `Fortran` variant af globale variable[2]. Vi har selv tilføjet to sådanne blokke, disse vil her blive beskrevet med henblik på at lette læsningen af de efterfølgende kodeudsnit. Vi vil også kort beskrive nogle få af de allerede eksisterende variable. De der ikke direkte beregnes i de viste rutiner opdateres andre steder i koden. Alle variable og størrelser i programmet er i naturlige enheder.

Variabelblokken `COMMON/NEWNS` indeholder størrelser, som primært bruges i forbindelse med beregningen af $\mathbf{u}^n(\psi^n)^+$.

Den er defineret som

```
COMMON/NEWNS/QSAVE(1:2),NTRUES,XUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),
    C YUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),XBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),
    C YBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),NEWNA
```

[1]Hvis man ikke er bekendt med `Fortran 77` kan vi anbefale Page [1995] som vi selv har haft stor nytte af.

[2]En `COMMON` blok er en samlet blok af variable

Hvor `NIFNL` og `NJFNL` angiver antallet af gitterpunkter i de to retninger.

Her følger en kort beskrivelse, (fodtegn angiver hvilken komposant, der er tale om).

QSAVE(1): Strømningshastighed for kilden i atrium.

QSAVE(2): Strømningshastighed for drænet ved aorta.

NTRUES: Antal interne aktive kilde/dræn, skifter mellem 1 (ved lukket dræn) og 2 ved åben dræn.

XUDIVU: $(\mathbf{u}^n(\psi^n)^+)_1$

YUDIVU: $(\mathbf{u}^n(\psi^n)^+)_2$

XBFIELD: Værdien af ledet $(\frac{\Delta t}{\rho}\mathbf{F}^n)_1$ (se liging 5.1.2)

YBFIELD: Værdien af ledet $(\frac{\Delta t}{\rho}\mathbf{F}^n)_2$

NEWNA: Logisk variabel. Hvis `TRUE` benyt den modificerede Navier-Stokes ligning, ellers benyt den originale.

Variabelblokken `COMMON/ENERSA` indenholder størrelser som primært bruges i forbindelse med beregningen af den kinetiske energien i systemet.

Den er defineret som

```
COMMON/ENERSA/OLDEN,DIVV(1:NIFNL,1:NJFNL),PFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL)
```

Hvor `NIFNL` og `NJFNL` som før angiver antallet af gitterpunkter i de to retninger.

Her følger en kort beskrivelse, (fodtegn angiver hvilken komposant, der er tale om).

OLDEN: Den totale kinetiske energi i systemet divideret med densiteten. Bruges til at beregne ændringen i kinetisk energi mellem to tidsskridt.

DIVV: Divergensen af hastighedsfeltet.

PFIEL: Trykfeltet. Indeholder trykket i naturlige enheder gange konstanten $\Delta T/2H$ og divideret med densiteten.

Her gives en liste over de vigtigste andre variabel og konstanter som vi benytter, opskrevet i tilfældig orden.

TK: Tidsskridtlængden Δt.

H: Gitterbreden h.

`BF1`: Hastighedsfeltets førstekomposant u_1.

`BF2`: Hastighedsfeltets andenkomposant u_2.

`IPR,JPR`: Angiver "hjørnet" af interne kilder og dræn.

`WPR`: Vægtfunktion for kilder og dræn, svarer til $w_{int}h^2$.

`ISINK`: Angiver placeringen af den externe kilde.

`WSINK/NJFNL`: Vægtfunktion for ekstern kilde ganget med h^2.

`LMAX`: Antallet af randpunkter.

`TKH2`: En indgående faktor $\Delta t/2h$.

E.2 Implementering af modificeret Navier-Stokes ligning

Ifølge ligning 5.1.2 skal vi for at implementere den modificerede Navier-Stokes ligning beregne ledet $\mathbf{u}^n(\psi^n)^+$ til hvert tidsskridt n og benytte dette i første opdatering af hastighedsfeltet til tiden $n+1$. Dette har vi implementeret i to skridt. Først opsamles de relevante indgående størrelser (se generel gennemgang af vores variabel) og ledet $\mathbf{u}^n(\psi^n)^+$ beregnes i slutningen af et tidsskridt. Dette sker i den af os skrevne rutine `DIVTERM` som findes i afsnit E.2.1. Selve beregningen som svarer til ligning 5.1.2 sker i rutinen `SPR`. Vi har derfor modificeret `SPR` passende. Rutinern findes i en lettere nedskåret version i afsnit E.2.2.

E.2.1 Beregning af $(\mathbf{u}\psi^+)$ ledet

I dette afsnit præsenteres kildekoden til rutinen `DIVTERM`. Her beregnes størrelsen $\mathbf{u}^n(\psi^n)^+$.

```
*     DIVTERM added 2000.03.31 by Niss & Jakobsen

      SUBROUTINE DIVTERM(ISINK,WSINK)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      PARAMETER(NPO=0,NFC=2**NPO,NIFNL=NFC*64,NJFNL=NFC*64,NWF=NFC)
      PARAMETER(MBP=800,MAXBP=NFC*MBP,MAXLNK=NFC*1600,MAXTRPL=NFC*64)
      PARAMETER(IW=NWF,NTID=6,NCYK=2,NBP=937,LTOT=NCYK*NTID*NFC*NBP)
      PARAMETER(MTOT=NFC*NFC*2800)

      COMMON/B1/BF1(0:NIFNL,NJFNL),BF2(0:NIFNL,NJFNL),
     C          BF3(0:NIFNL,NJFNL),PRESSURE(0:NIFNL,NJFNL)
      COMMON/B9/IFNL,JFNL,NBGFNL,SQIFNL,SQJFNL
      COMMON/B13/LIMIT,NSKIP,KLOK
      COMMON/B13/KLOKZ
      COMMON/B17/TK,H
      COMMON/BWP/IPR(10),JPR(10),WPR(4,NWF*8,NWF*8)

      COMMON/NEWNS/QSAVE(1:2),NTRUES,XUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),XBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),NEWNA

      COMMON/ENERSA/OLDEN,DIVV(1:NIFNL,1:NJFNL),PFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL)

      LOGICAL NEWNA
      INTEGER ISINK(4*IW)
      DIMENSION WSINK(4*IW)
```

```
C     Sets up the array
      DO 10 I=1,NJFNL
      DO 10 J=1,NIFNL
         DIVV(J,I)=0
 10   CONTINUE

c     Adds the intern sink/source
      DO 20 I=1,NTRUES
C     The corners of the sink/sorce is at (IC+1,JC+1)
         IC=IPR(I)
         JC=JPR(I)
         DO 30 J=1,8*NWF
         DO 30 K=1,8*NWF
c           Does some wrap around (IP,JP) is the point
            IP=MOD(IC+K-1,NIFNL)+1
            JP=MOD(JC+J-1,NJFNL)+1
            DIVV(IP,JP)=DIVV(IP,JP) + WPR(I,K,J)*QSAVE(I)/H**2
 30   CONTINUE
 20   CONTINUE

C     calculates Q for the external sink
      QEXT=0
      DO 40 I=1,NTRUES
         QEXT=QEXT-QSAVE(I)
 40   CONTINUE

C     adds the extern sink/source
      DO 50 J=1,4*IW
      DO 50 K=1,NJFNL
         DIVV(ISINK(J),K)=DIVV(ISINK(J),K)+WSINK(J)/NJFNL*(QEXT)/H**2
 50   CONTINUE

c     calculates v*div(v)+
      DO 60 I=1,NJFNL
      DO 60 J=1,NIFNL
         IF (DIVV(J,I).GT.0) THEN
            XUDIVU(J,I)= DIVV(J,I)*BF1(J,I)
            YUDIVU(J,I)= DIVV(J,I)*BF2(J,I)
         ELSE
            YUDIVU(J,I)= 0
            XUDIVU(J,I)= 0
         END IF
 60   CONTINUE

      RETURN
      END
```

E.2.2 Opdatering af hastighedsfelt

I dette afsnit præsenteres kildekoden til rutinen SPR. Vi har for at lette overskueligheden fjernet en hel del linjer fra koden. De udeladte linjer har til opgave at holde øje med krafternes størrelse, men har ingen interesse for vores modifikationer. Rutinen foretager blandt andet den i ligning 5.1.2 beskrevne opdatering af hastighedsfeltet.

```
      SUBROUTINE SPR
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      PARAMETER(NPO=0,NFC=2**NPO,NIFNL=NFC*64,NJFNL=NFC*64,NWF=NFC)
      PARAMETER(MBP=800,MAXBP=NFC*MBP,MAXLNK=NFC*1600,MAXTRPL=NFC*64)
      PARAMETER(IW=NWF,NTID=6,NCYK=2,NBP=937,LTOT=NCYK*NTID*NFC*NBP)
      PARAMETER(MTOT=NFC*NFC*2800)
      COMMON/B1/BF1(0:NIFNL,NJFNL),BF2(0:NIFNL,NJFNL),
     C          BF3(0:NIFNL,NJFNL),PRESSURE(0:NIFNL,NJFNL)
      COMMON/B3/LMAX,LEND,LDXM,LDXEND,NPL,XVRT,YVRT,GAMMA,
     C          LENDF,LFXEND
      COMMON/B4/IDEL(MAXBP,4),JDEL(MAXBP,4),
     C          XDEL(MAXBP,4),YDEL(MAXBP,4)
      COMMON/B4/IUNK(MAXBP,4),JUNK(MAXBP,4)
      COMMON/B7/FB1(MAXBP),FB2(MAXBP),
     C          FBZ1(MAXBP),FBZ2(MAXBP)
      COMMON/B17/TK,H

C     NEWNS and B17 added 2000.04.14 by Niss & Jakobsen
      COMMON/NEWNS/QSAVE(1:2),NTRUES,XUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),XBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),NEWNA

      LOGICAL NEWNA

C     Added by Niss & Jakobsen 2000.04.25
C     Set NEWNA to TRUE if you wish to get
C     the New Navia-Stoke equation. The New Navia-Stoke equation
C     is modified by the terms TK*XUDIVU(I,J) and TK*YUDIVU(I,J)
```

```
      IF (NEWNA) THEN
         DO 10 I=1,NIFNL
         DO 10 J=1,NJFNL
            BF1(I,J)=BF1(I,J)-TK*XUDIVU(I,J)
            BF2(I,J)=BF2(I,J)-TK*YUDIVU(I,J)
c     Initializes XBFIEL and YBFIEL
            XBFIEL(I,J)=0
            YBFIEL(I,J)=0
 10      CONTINUE

      ELSE
c     Initializes XBFIEL and YBFIEL
         DO 11 I=1,NIFNL
         DO 11 J=1,NJFNL
            XBFIEL(I,J)=0
            YBFIEL(I,J)=0
 11      CONTINUE
      END IF
c     ***********

      DO 2 L=1,LMAX
      DO 1 K1=1,4
        I=IDEL(L,K1)
        DO 1 K2=1,4
          J=JDEL(L,K2)
          W=XDEL(L,K1)*YDEL(L,K2)

          BF1(I,J)=BF1(I,J)+W*FBZ1(L)
          BF2(I,J)=BF2(I,J)+W*FBZ2(L)
c     Update XBFIEL and YBFIEL added by Niss & Jakobsen
          XBFIEL(I,J)=XBFIEL(I,J)+W*FBZ1(L)
          YBFIEL(I,J)=YBFIEL(I,J)+W*FBZ2(L)
c     ***********'
    1   CONTINUE
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

E.3 Implementering af energiberegning

Energiberegningen foregår på baggrund af den i afsnit 5.1.2 beskrevne diskretisering. De beregnede kinetiske energistørrelser udskrives til passende filer. Værdien af den samlede kinetiske energi gemmes fra tidsskridt til tidsskridt, og benyttes til at beregne ændringen af kinetisk energi pr. tid som beskrevet i ligning 5.1.4.

```
*     KINETI added 2000.17.05 by Niss & Jakobsen
      SUBROUTINE KINETI
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      PARAMETER(NPO=0,NFC=2**NPO,NIFNL=NFC*64,NJFNL=NFC*64,NWF=NFC)
      PARAMETER(MBP=800,MAXBP=NFC*MBP,MAXLNK=NFC*1600,MAXTRPL=NFC*64)
      PARAMETER(IW=NWF,NTID=6,NCYK=2,NBP=937,LTOT=NCYK*NTID*NFC*NBP)
      PARAMETER(MTOT=NFC*NFC*2800)
      COMMON/B17/TK,H
      COMMON/B1/BF1(0:NIFNL,NJFNL),BF2(0:NIFNL,NJFNL),
     C          BF3(0:NIFNL,NJFNL),PRESSURE(0:NIFNL,NJFNL)
      COMMON/B14/TKHH,TKH2

      COMMON/NEWNS/QSAVE(1:2),NTRUES,XUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YUDIVU(1:NIFNL,1:NJFNL),XBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),
     C YBFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL),NEWNA

      COMMON/ENERSA/OLDEN,DIVV(1:NIFNL,1:NJFNL),PFIEL(1:NIFNL,1:NJFNL)

      DOUBLE PRECISION NEWEN,DKDT,BWORK,VDIS,SENER,WSS
      DOUBLE PRECISION XX,XY,YX,YY
      LOGICAL NEWNA

      NEWEN=0
      BWORK=0
      VDIS=0
      SENER=0
      WSS=0
```

```
      DO 10 I=1,NIFNL
      DO 10 J=1,NJFNL
c     calculates the total kinetic energy of the system
         NEWEN = NEWEN + (BF1(I,J)**2+BF2(I,J)**2)*(H**2)/2.
c     calculates the work from the boundary XBFIEL/TK and YBFIEL/TK
c     is the (force/density) pr. area
         BWORK=BWORK+(BF1(I,J)*XBFIEL(I,J)+BF2(I,J)*YBFIEL(I,J))*(H**2)/TK

c     calculates the rate of viscous dissipation
c     to ease the reading, this is done in some steps
         XX=(BF1(IWRAP(I+1),J)-BF1(I,J))/H
         YX=(BF2(IWRAP(I+1),J)-BF2(I,J))/H
         XY=(BF1(I,JWRAP(J+1))-BF1(I,J))/H
         YY=(BF2(I,JWRAP(J+1))-BF2(I,J))/H
c     the term TKHH*H**2/TK is the viscosity/density in program units
          VDIS = VDIS + TKHH*H**2/TK*(XX**2 + YX**2 + XY**2 + YY**2)*(H**2)

c     calculates the rate of energy change from sorce and sink

         IF (NEWNA) THEN
            SENER= SENER +(BF1(I,J)**2+BF2(I,J)**2)*(ABS(DIVV(I,J)))*H**2/2.
         ELSE
            SENER= SENER +(BF1(I,J)**2+BF2(I,J)**2)*DIVV(I,J)*H**2/2.
         END IF

c     calculates the work by the sorce and sink against the pressure
c     the term PFIEL/TKH2 is  pressure/density

         WSS=WSS + PFIEL(I,J)/TKH2*DIVV(I,J)*(H**2)

 10   CONTINUE

c     calculates dK/dt

      DKDT=(NEWEN-OLDEN)/TK

c     Write out to some files
      WRITE(71,100) DKDT
      WRITE(72,100) NEWEN
      WRITE(73,100) BWORK
      WRITE(74,100) VDIS
      WRITE(75,100) SENER
      WRITE(76,100) WSS

c     update OLDEN to the current energy
      OLDEN=NEWEN

 100  FORMAT(1E30.20)

      RETURN
      END
```

F English summary

Momentum and energy in an model with distributed sources

Kristine Niss*

Bo Jakobsen†

Department of Mathematics and Physics, Roskilde University,
P.O. Box 260, DK-4000 Roskilde, Denmark

17th November 2000

Abstract

In the following paper we present the main results of a one term graduate student project[1]. The entire work is presented, in Danish, in Jakobsen & Niss [2000].

We analyse the form of the fluiddynamical equation of motion, in a two dimensional model with distributed sources and periodic boundary conditions. We conclude that the form of the equation of motion depends on the assumptions about the fluid entering and leaving the model. Futher we look at the total kinetic energy in the model, and how it depends on the assumptions.

Introduction

The starting point of our work was Charles Peskin's two dimensional model of the flowpattern of the heart [Peskin, 1977]. The object of our work has been to determine which form the fluiddynamical equation of motion in the model should (or could) have. We start out by explaining why the form of the equation of motion has been an issue and proceed by presenting our results. We have worked theoretically with the form of the equation of motion and, subsequent to this, we have implemented an equation different from that originally used in the model, and studied the effects on the results of the model. In the

*kniss@dirac.ruc.dk

†boj@dirac.ruc.dk

[1]The work was supervised by Jesper Larsen (IMFUFA, Math-Tech). In addition to J. Larsen we would like to thank Jacob M. Jacobsen (IMFUFA), Viggo Andreasen (IMFUFA) and Pernille Thorup Adeler (Math-Tech) for their help.

following work we concentrate on the theoretical part of our work, as we consider our results here to be the most interesting. The heart model is not presented in this paper. We have made this choice, partly because the model, is thoroughly presented in several other papers (e.g. [Peskin, 1977]), and partly because the theoretical part of our results holds true for any two dimensional fluiddynamical model with distributed sources, sinks and periodic boundary conditions.

The central hypothesis of Peskin's modelling is that the blood can be modeled as an incompressible, homogeneous and Newtonian fluid[2]. The incompressibility is expressed in the equation of continuity,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

which, along with the assumptions that the fluid is Newtonian and homogeneous, leads to the following (standard) equation of motion, the Navier-Stokes equation,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \tag{2}$$

Where $\mathbf{u}$ and t represent velocity and time. F is force per unit area, which is analogous to a volume force in three dimensions. p represents pressure and has the dimension force per unit length. ρ and μ are the (two dimensional) density and viscosity. Spatial and time dependence should be understood.

One of the main charecteristics, of Peskin's model is that it has periodic boundary conditions. The consequence of the periodic boundary conditions is that fluid cannot enter or leave the modeled area at the boundary. In its early use this did not cause any problems because only a limited part of the heart cycle was represented in the model. However as the model advanced to modelling a full or even a couple of heartbeats, it soon became necessary to have fluid leaving and entering the model. Peskin solved this problem by placing distributed sources and sinks in the model. The distribution of source and sinks are given by a function (ψ) that depends on time and space. ψ gives the area of fluid[3] entering per area of the model per second, thus it has the dimension "per second".

The mathematical consequence of the introduction of ψ is that the equation of continuity is modified to,

[2]The assumption that the fluid is Newtonian leads to the following expression for the stress tensor

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij} \right) \tag{1}$$

[3]The model is 2-dimensional, hence area.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \psi \tag{3}$$

Thus the above equation has been a part of the model since the introduction of distributed sources[4] in the model. Apparently the form of the equation of motion was not reconsidered when the sources were introduced, although the equation of continuity plays a crucial part in the derivation of the equation of motion. This led to the concern that the model contained inconsistencies, and this is why the form of the equation of motion is worth discussing. We will continue by doing so.

The effect of the sources on the momentum

The resulting form of the equation of motion in a system with distributed sources, depends on the assumptions made about the momentum of the fluid that leaves or enters the model. It is obvious that it is desirable that the fluid leaving the model takes its momentum with it as it leaves. It is less obvious how much momentum should be designated to fluid entering the model.

Since the fluid is assumed incompressible and homogeneous, momentum is proportional to the velocity of the fluid, thus momentum and velocity can be used equivalently.

We have considered two possible assumptions about the momentum of the fluid entering the model. The first being that the fluid enters with no velocity (this assumption has been suggested by Peskin in an unpublished note [Peskin, 1998]), and the second being that it enters with the velocity the fluid in the model has at the source.

Both assumptions are combined with equation 3, and the assumption that the fluid, when leaving the model, takes it momentum with it. The equation of motion has been derived by looking at the change of momentum in a randomly chosen fixed area (A), contained in a closed curve (l).

The assumption that fluid entering the model has no momentum leads to the following equation regarding the i'th component of the momentum ($\mathbf{P}$),

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t}\, dA = \int_l T_{ij} n_j\, dl + \int_A F_i dA - \int_l u_i \rho\, u_j n_j\, dl + \int_A u_i \rho \psi^- \, dA \tag{4}$$

Where $i, j \in x, y$ and we use Einstein's summation convention. $T_{i,j}$ is the stress tensor, and $\psi^- = \psi$ if $\psi < 0$ else $\psi^- = 0$.

[4]In the rest of this text we use "sources" as an abbreviation for both sources and sinks.

By using Gauss' theorem, the continuity of the integrand, and the fact that the area of integration is randomly chosen we get the following equation of motion after some manipulations,

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p - \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F} - \psi^+\mathbf{u} \tag{5}$$

where $\psi^+ = \psi - \psi^-$.

Thus, we have an equation of motion which is modified, in comparison to equation 2 due to the distributed sources in the model.

The assumption that fluid entering the model has the same velocity as the fluid in the model at the point where it enters, leads to the following equation,

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_A \frac{\partial u_i \rho}{\partial t}\, dA = \int_l T_{ij} n_j \, dl + \int_A F_i dA - \int_l u_i \rho \, u_j n_j \, dl + \int_A u_i \rho \psi \, dA \tag{6}$$

which leads to

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p - \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}$$

This is the same equation as equation 2. Thus an equation of motion equivelant to the ordinary equation of motion for incompressible fluids is found, although the equation of continuity does not have its standard form. This is especially interesting because this is the equation of motion which in fact has been used in Peskin's model.

Thus we have shown that the use of the standard Navier-Stokes equation along with equation 3 does not lead to any inconsistencies, but that it is the consequence of sensible assumptions about the momentum at the sources. We have shown that different assumptions lead to different equations of motion, therefore it is important to discuss which assumptions are the most appropriate for the model in question.

We have not studiet which of the two assumptions is the more theoretically correct (from a physiological point of view) in the case of the heart. We believe that both assumptions are plausible, but other assumptions may be plausible as well. Evidently it is possible to choose the momentum of the entering fluid arbitrarily. However in the case of the heart it is not reasonable to choose a velocity greater than the current velocity at the source, since blood enters the heart at a low speed and is accelerated by the work of the heart muscle.

We have implemented equation 5 in the computer program that runs the heart model, and have found that this change only makes very minor differences to the velocity field. This is due to the fact that the velocities of the fluid at the sources where fluid enters the model are small. In other models that might not be the case, and the differences in the velocity fields could be crucial.

The effect of the sources on the total kinetic energy

In our work with the model we needed a way to characterise the total state of the system. We have calculated the change in total kinetic energy of the system as a function of time. This calculation is based on a method from Peskin [1998].

By rearranging the terms of equation 5 we get,

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_i + F_i + \mu\nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i\rho\psi^+ \tag{7}$$

multiplying by u_i, summerising over i and integrating over the computation domain we get the following after some heavy reduction,

$$\int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\,dA = \int_\Omega u_i F_i\,dA - \int_\Omega \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dA + \int_\Omega p\psi\,dA - \int_\Omega \frac{1}{2}u_i u_i \rho|\psi|\,dA \tag{8}$$

In the calculation the periodic boundary conditions are exploited together with the fact that the domain is rectangular.

It is seen that the left side reduces to,

$$\int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\,dA = \int_\Omega \frac{1}{2}\rho\frac{\partial|\mathbf{u}|^2}{\partial t}\,dA$$

which exactly is the rate of change of total kinetic energy.

An equivalent calculation based on equation 2 gives,

$$\int_\Omega \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\,dA = \int_\Omega u_i F_i\,dA - \int_\Omega \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dA + \int_\Omega p\psi\,dA + \int_\Omega \frac{1}{2}u_i u_i \rho\psi\,dA \tag{9}$$

It is seen that the two equations for the rate of change of the total kinetic energy only differ in the last term, and do so in a way that can be interpreted. In both cases the liquid leaving the model ($\psi < 0$) results in a loss of energy. This corresponds well to the fact that the liquid takes along its momentum when leaving the model.

In equation 8 the liquid entering the model also results in a loss of energy. This is because the liquid in the model has to accelerate the liquid entering, and this process results in an energy loss. As Peskin points out [Peskin, 1998], this process is analogous to an inelastic collision.

In equation 9, the liquid entering the model provides a positive amount of energy, which corresponds well to the assumption that the liquid entering the model has a positive velocity.

We have implementet a discrete version of the energi calculations in the program which runs the model. In figure 1 the total kinetic energy is plottet as a function of time. Data from the original model[5] and the modified version of the model[6] is shown along with the difference between the two. The figure shows only minor differences between the to versions of the model, and the same result is, as earlier mentioned, obtained by studying the velocety fields of the two versions of the model.

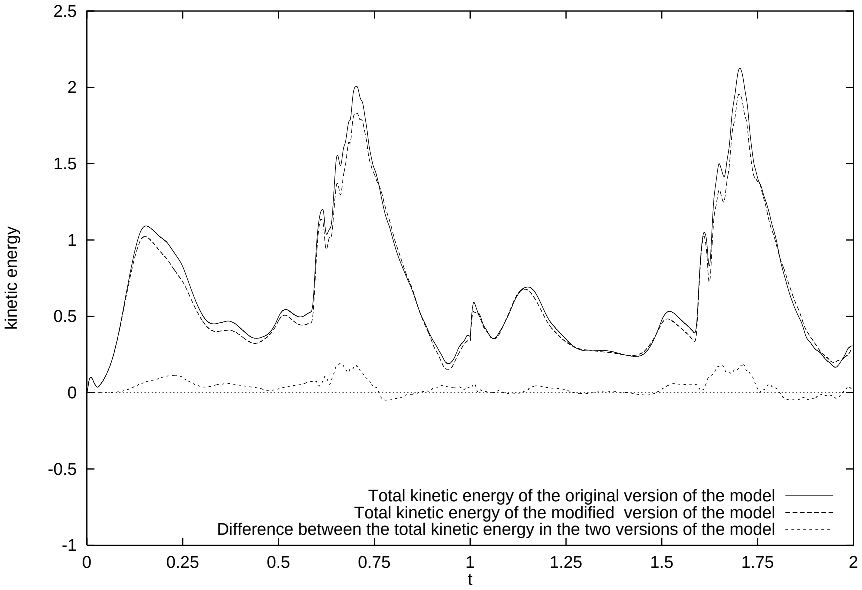


Figure 1 Total kinetic energy (devided by density) as a funktion of time. Time of a heart beat and length of the domain of calculation are used as units of time and length.

Conclusion

We conclude that it is important to decide what the assumptions about the momentum of the liquid entering and leaving the model should be, because different assumptions lead to different equations of motion. In some models this difference might be of great importance, but in the model we have worked with the differences in the results of the model are very minor.

[5]The original model corresponds to equation 2 and 9.

[6]The modified version of the model corresponds to equation 5 and 8

We have also shown that a special set of assumptions leads to the standard Navier-Stokes equation. This means that current models using this equation and having the described properties (distributed sources and periodic boundary conditions), do in fact handle the momentum in a consistent way, if the described assumptions can be applied.

References

Jakobsen, B. & Niss, K. [2000]. Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel (in Danish), *Tekst 388*, Department of Mathematics and Physics, Roskilde University.

Peskin, C. S. [1977]. Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of computational physics* **25**: 220–252.

Peskin, C. S. [1998]. Incompressible fluid dynamics with distributed sources and sinks. Unpublished note.