TEKST NR 412 2002

Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning

–

en generel analyse
samt en behandling af strømningen bag en cylinder

Kristine Niss og Bo Jakobsen.

et matematik modul III professionsprojekt – forskervariant
Vejledere: Morten Brøns og Johnny Ottesen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde
Tlf: 46 74 22 63 · Fax: 46 74 30 20 · Mail: imfufa@ruc.dk

Kristine Niss og Bo Jakobsen: *Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømningen bag en cylinder.*

Et matematik modul III professionsprojekt – forskervariant
Vejledere: Morten Brøns og Johnny Ottesen

IMFUFA tekst nr. 412/2002 110 sider ISSN 0106-6242

Abstract

På baggrund af topologisk fluidmekanik og Hopfbifurkationsteori undersøges det, hvad man generelt kan sige om topologierne i et fluidmekanisk system, som har gennemgået en Hopfbifurkation.

Vi viser at den periodiske strømning, som findes lige efter en Hopfbifurkation, kvalitativt giver anledning til en tidslig sekvens af strømlinjetopologier. Disse sekvenser kan beskrives ved lukkede ellipseformede banekurver i udfoldningsparameterrummet for den stationære strømning, som Hopfbifurkerer. Vi finder, at det er muligt at opskrive generelle krav til banekurverne på baggrund af eksistensen af en Hopfbifurkation, samt at disse ellipseformede kurver til første orden har centrum i de parameterværdier, som svarer til den stationære strømning, der Hopfbifurkerer.

Som anvendelse af den generelle teori har vi undersøgt den todimensionelle væskestrømning bag en cylinder.

Den simpleste strømlinjefunktion, som i sin udfoldning indeholder den strømlinjetopologi, som ses før bifurkationen til periodisk strømning, beskrives og benyttes som model for den faktiske strømning bag en cylinder. På baggrund af de fundne generelle resultater angående samspillet mellem Hopfbifurkation og topologi, og modellen for strømningen, forudsiges en sekvens af strømlinjetopologier, som *må* findes lige efter overgangen til periodisk strømning, samt sandsynlige sekvenser som kan findes ved højere Reynoldstal. Vi finder at disse forudsigelser, og hele den opstillede tolkning af topologierne i strømningen bag en cylinder, er i fuld overensstemmelse med numeriske data fra Petersen [2002a].

A very short summary in English is included as appendix A.

Forord

Denne IMFUFA-tekst er et genoptryk af en modul III forskervariant projektrapport fra matematikoverbygningen på RUC. De eneste ændringer i forhold til den oprindelige rapport er, at enkelte regne- og trykfejl er blevet rettet, samt at en kopi af en poster om projektet er tilføjet som appendiks.

Projektarbejdet er udført i perioden september 2001 til maj 2002. Vi har i hele denne periode været vejledt af Morten Brøns fra Institut for Matematik på DTU. I forårssemesteret er vi desuden blevet vejledt af Johnny Ottesen fra IMFUFA, RUC.

Vi ønsker at give en særlig tak til Morten Brøns for at pege på de spørgsmål vi har søgt at besvare, samt for hans uvurderlige vejledning og motivation undervejs.

Vi vil også gerne takke vores vejleder Johnny Ottesen for hjælp og opbakning undervejs, specielt tak for engagementet allerede i efteråret.

Desuden vil vi takke Rune Petersen for hurtigt at svare på opklarende spørgsmål angående hans simuleringsdata, samt for at have udlånt originale figurer med disse data. Ligeledes tak til Johan Hartnack for udlån af en figur.

Endelig en stor tak til Eva Uhre for korrekturlæsning.

God læselyst.

Bo Jakobsen og Kristine Niss
November 2002 IMFUFA, RUC

Noter til den elektroniske udgave

Eneste forskel på denne elektroniske udgave og den trykte udgave af teksten er at indholdet af appendiks A og B ikke er inkluderet i den elektroniske udgave. Dette manglende indhold kan hentes på:
`http://dirac.ruc.dk/~boj/publikationer.html#topologi`

Hyppigt benyttede symboler

*	Kompleks konjugeret
$\leftrightarrow$	Bijektion
$\lvert \cdot \rvert$	Determinanten
L	Lineær del af funktion
N	Ikke-lineær del af funktion
$O(n)$	Led af mindst n'te orden i de aktuelle avriable
$O(n,m)$	Led af mindst n'te orden i sted og m'te orden i udfoldningsparametre
$\boldsymbol{x}$	Et punkt i planen $\boldsymbol{x} = (x, y)$, eller ubekendt funktion $\boldsymbol{x}(\tau)$ i differentialligning
$\boldsymbol{\xi}$	Transformeret punkt $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$
$\boldsymbol{v}$	Et hastighedsfelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}))$ eller et generelt vektorfelt
ω	Rotation af et hastighedsfelt $\omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$ eller vinkelfrekvensen af den periodiske strømning
$\boldsymbol{f}$	Et vektorfelt, typisk todimensionelt $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}))$
ε	Fællesbetegnelse for udfoldningsparametrene eller variablen som Poincaré-Lindstedt rækken er i
$\boldsymbol{\varphi}$	Strømningen hørende til et differentialligningssystem
ψ	Strømlinjefunktion
$\psi_{n,m}$	Taylorkoefficient for strømlinjefunktion
$a_{n,m}$	Taylorkoefficient
S	Genererende funktion til kanonisk transformation
Re	Reynoldstal

Indhold

1 Indledning

Generel baggrund

Dette projekt ligger inden for området *topologisk fluidmekanik*. Formålet med topologisk fluidmekanik er at opnå indsigt i, hvilke strømningsmønstre der kan eksistere i en væskestrømning, samt hvilke overgange der er mulige mellem de forskellige strømningsmønstre.

Væskestrømninger skaber mønstre på (mindst) tre oplagte måder, som har det tilfælles, at man betragter en "væskepartikel". I praktiske forsøg gøres dette ved at tilsætte væsken en form for partikler, der har den egenskab, at de har samme densitet som væsken og dermed præcis følger væskens bevægelse.

Partikebanekurver: En partikelbanekurve[1] er den bane som en partikel følger i væsken. De kan i praksis findes ved at filme en væskestrømning tilsat få synlige partikler, og derefter optegne den kurve som de enkelte partikler følger.

Mange-partikel billeder: Denne type billeder er de meste udbredte, da de er letteste at frembringe. Man tilsætter blot væsken farvestof hele tiden ved udvalgte positioner, og filmer udviklingen (eller tager et snapshot til en given tid). Hvis man betragter en stationær strømning vil denne form for billeder vise partikelbanekurverne/strømlinjerne.

Strømlinjer: Disse linjer beskriver, hvordan partikler ville bevæge sig, hvis man kunne fastholde det instantane hastighedsfelt (se kapitel 2 for en mere præcis definition). For stationær strømning er strømlinjer og partikelbanekurver det samme. For ikke stationær strømning kan strømlinjerne findes ved at betragte væsken over en kort tidsperiode; partikler i væsken vil så approksimativt beskrive det instantane hastighedsfelt, og fra dette kan man så konstruere strømlinjerne.

Disse tre typer billeder på væskens bevægelse giver naturligvis forskellige typer information omkring væskestrømningen. De to første billedtyper giver primært information omkring transportprocesser i væskestrømningen. Specielt viser mange-partikel billeder hvor partiklerne klumper sammen, men man har ingen information om, hvor de forskellige partikler kommer fra eller hvor lang

[1] På engelsk: Streak lines.

tid de har været undervejs. Strømlinjebilledet giver derimod information omkring, hvordan hastighedsfeltet i væsken ser ud til et givent tidspunkt.

Når man løser fluidmekaniske problemer i almindelighed er udgangspunktet Navier-Stokes ligningen, en kontinuitetsligning og et sæt randbetingelser. Herfra bestemmes et tidsafhængigt tryk- og hastighedsfelt. Det er netop dette hastigtighedsfelt, som kan illustreres via strømlinjerne.

I topologisk fluidmekanik er det også disse strømlinjemønstre der analyseres. Gennem rapporten benævner vi mønstrene som *strømlinjetopologier*, *strømningstopologier* eller blot *topologier* (se også afsnit 2.2). Analysen af topologierne udføres ved at benytte den kvalitative teori for dynamiske systemer, til at bestemme, hvilke strømlinjetopologier, der er stabile og derfor kan eksistere i længere tid. Desuden bestemmes ustabile strømlinjetopologier, og disse benyttes til at forudsige hvilke overgange, der er mulige mellem forskellige stabile strømlinjetopologier. Topologisk fluidmekanik giver altså kvalitativ information om hvilke hastighedsfelter, der kan eksistere som løsninger til et givent fluidmekanisk problem, uden at de konkrete ligninger skal løses.

Projektet

På trods af at den topologiske fluidmekanik handler om hastighedsfelter, der indgår som en del af løsningen til et fluidmekanisk problem, er topologisk fluidmekanik ikke traditionelt blevet koblet med informationer og antagelser omkring den tidslige dynamik i løsningen til det fluidmekaniske problem.

I Hartnack [1999b] tages et skridt i denne retning i kraft af, at der laves en generel analyse af, hvilke begrænsninger det lægger på strømlinjetopologierne at Navier-Stokes ligningen skal være opfyldt.

Formålet med dette projekt er at skabe en yderligere kobling mellem dynamikken af løsningen på det fluidmekaniske problem og topologierne. Specielt undersøges det, hvad det betyder for strømningstopologierne, hvis det er en Hopfbifurkation, der bevirker en overgang fra en stationær til en periodisk løsning på det fluidmekaniske problem. Dette gøres dels ved en generel undersøgelse og dels ved at analysere en konkret case. Det generelle spørgsmål kan formuleres som

- Hvad kan man generelt sige om topologien i et fluidmekanisk system, hvor der forekommer en Hopfbifurkation?

Ved at inddrage antagelser om dynamikken af løsningen i den topologiske fluidmekanik, udvides det område, topologisk fluidmekanik udtaler sig om. Dels kan vi få oplysninger om hvilke strømningstopologier, der kan eksistere i bestemte situationer, og dels opstår der en mulighed for at udtale sig om den tidslige udvikling i strømningstopologierne.

Casen er strømningen bag en cylinder i det regime, hvor den er todimensionel (Reynoldstal < 200)[2]. Denne strømning er et klassisk fluidmekanisk problem, og har stor interesse i sig selv. Formålet med at undersøge denne case er således tvedelt set fra vores synspunkt. Dels bruges den som en case til at illustrere, hvordan de generelle resultater kan anvendes. Dels er den så interessant at analysere, at den i sig selv er tilstrækkelig motivation for at gøre sig de generelle overvejelser. Formålet med vores arbejde med casen er at

- opbygge den simpleste konsistente topologiske model for den todimensionelle strømning bag en cylinder.

Strømningen bag en cylinder indeholder netop en overgang fra stationær til periodisk strømning, og for at karakterisere denne overgang anvendes de generelle resultater.

Strømningen bag en cylinder

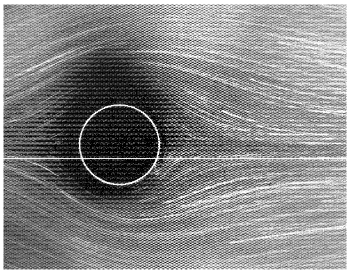
Vi vil her give en kort oversigt over, hvad man ved om strømningen bag en cylinder.

Hvis man betragter væske, som strømmer forbi en cylinder, er det simpleste og mest oplagte, man kan forestille sig, en symmetrisk væskestrømning som smyger sig langs cylinderen, og denne strømning ses også i virkeligheden for meget små Reynoldstal. (Denne strømning benævner vi til tider *den krybende strømning*). Hvis man hæver Reynoldstallet lidt, opstår der to stationære hvirvler bag cylinderen (benævnes *dobbeltboble strømningstopologien*), og hvis man hæver Reynoldstallet endnu mere sker der et skift fra stationær og symmetrisk strømning til periodisk strømning. Samtidig med skiftet til periodisk strømning opstår et meget karakteristisk hvirvelmønster i væsken bag cylinderen. Dette fænomen blev beskrevet omkring 1911 af T. von Kármán, og hvirvelmønsteret kaldes i dag von Kármáns hvirvel allé.

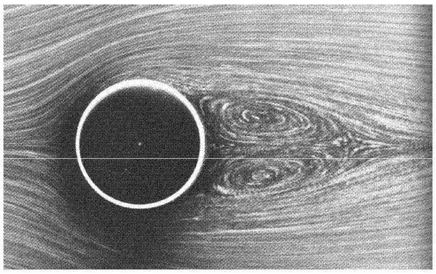
På figur 1.1 ses strømningen nær en cylinder ved forskellige Reynoldstal.

Når dette fænomen ikke kun har akademisk interesse, skyldes det at den periodiske strømning påvirker cylinderen, hvilket kan have uheldige følgevirkninger. Som et spektakulært eksempel kan nævnes, at sammenbruddet af Tacoma broen (i 1940, USA) forklares ved denne periodiske påvirkning [Malina, 2002]. Derfor er viden om dette fænomen også vigtigt for forskellige former for ingeniørvidenskab.

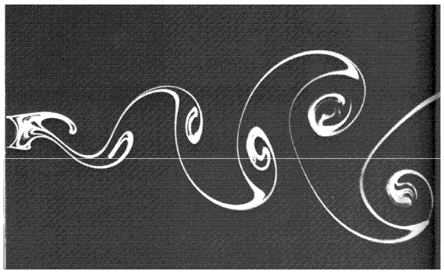
[2]Reynoldstallet (Re) er den inverse kinematiske viskositet udtrykt i naturlige enheder for systemet: $1/\mathrm{Re} = \frac{\eta}{\rho u L}$ hvor η er viskositeten af væsken, ρ densiteten af væsken, u en karakteristisk hastighed af væsken og L er en karakteristisk længde. For strømning omkring en cylinder er u hastigheden af væsken langt væk fra cylinderen og L diameteren af cylinderen.



(a) $Re = 1,54$



(b) $Re = 26$



(c) $Re = 140$

Figur 1.1 Strømning omkring en cylinder ved forskellige Reynoldstal [Dyke, 1982].

Kortlægning af dynamikken

Som før nævnt afhænger måden væsken strømmer på af Reynoldstallet. Denne afhængighed er i dag vel kortlagt. Det følgende bygger på review-artiklen Williamson [1996], og på nye numeriske undersøgelser fra Petersen [2002a] (disse passer udmærket med andre data fra litteraturen). Man kan groft dele op i følgende regimer, (hvor Reynoldstallene er bestemt med meget forskellig præcision).

Re mindre end 6**:** Væsken kryber rundt om cylinderen, og der er ingen hvirvler bag denne.

Re fra 6 **til** 42**:** Stationær strømning med to hvirvler bag cylinderen.

Re fra 42 **til et sted mellem** 140 **og** 194**:** Strømningen er periodisk men stadig todimensionel. Petersen [2002a] viser, at der i dette område er en overgang fra en type periodisk strømning til en anden. Dette vil blive diskuteret senere (se afsnit 7.5).

Re større end 190**:** Strømningen bliver tredimensionel. Det er muligt at finopdele i flere forskellige slags tredimensionelle strømninger, men dette er uden interesse for vores arbejde.

Overgangen fra stationær strømning til periodisk strømning kan ses som et udtryk for en Hopfbifurkation, men eksistensen af en sådan overgang er ikke noget bevis for, at der faktisk er en Hopfbifurkation. I litteraturen omtales overgangen dog ofte som en Hopfbifurkation, se f.eks kapitel 1 i Marsden & McCracker [1976].

Den lokale væskestrømning bag cylinderen

Der vides altså meget om, hvordan strømningen overordnet ser ud, men der er ikke meget viden om, hvordan selve hvirvlerne opstår, og hvordan strømningstopologien ser ud lige bag cylinderen. I Perry et al. [1982] foreslås det, at man ved at analysere, hvordan det instantane strømlinjer udvikler sig, kan få insigt i strømningsdynamikken lige bag cylinderen. Der opstilles på baggrunde af analyser af eksperimentelle data en model for hvordan sekvensen[3] af strømlinjetopologier lige bag cylinderen er (se afsnit 8.3 og specielt figur 8.1). For nylig har R. Petersen dog via computersimuleringer indikeret, at den foreslåede sekvens af topologier tilsyneladende ikke findes i den todimensionelle strømning bag en cylinder Petersen [2002a] (se afsnit 7.5).

Rapportens opbygning

I de næste to kapitler vil vi gøre rede for den topologiske fluidmekanik i to dimensioner. Dette gøres dels med henblik på at præsentere teorien, således som vi anvender den i et senere kapitel. Desuden ønsker vi at give en klar og sammenhængende præsentation af den topologiske fluidmekanik i sin "rene" form således, at det bliver klart, hvad det er for nogle udvidelser der efterfølgende introduceres.

Kapitel 4 indeholder en generel introduktion til Hopfbifurkationen. Desuden introduceres en metode til at finde den periodiske strømning efter bifurkationen, den såkaldte Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling. Vores tilgang til disse emner er meget operationel. Derfor beskriver vi udelukkende de resultater, som vi har behov for i forbindelse med vores anvendelse.

De generelle resultater udledes i kapitel 5. Her sammenkobles antagelsen om eksistensen af en Hopfbifurkation med den topologiske fluidmekanik. Desuden udnyttes nogle resultater (fra Hartnack [1999b]) angående betydningen af selve Navier-Stokes ligningen.

I kapitel 6, gives en topologisk beskrivelse af strømningen bag en cylinder i det regime hvor strømningen er stationær, ved at der konstrueres en simpel strømlinjefunktion, som indeholder de relevante topologier. Endvidere konstrueres en normalform for en udfoldning af denne strømning. I kapitel 7 analyseres

[3]Når vi taler om en sekvens af strømlinjetopologier, skal det forstås som den tidslige rækkefølge af topologier, der findes i en periodiske strømning. Man skal dog være opmærksom på, at der ikke er nogen information om, hvor længe de enkelte topologier findes i strømningen.

tidsudviklingen af den konstruerede strømning under den antagelse at der forekommer en Hopfbifurkation. Det vil sige at det er en analyse med udgangspunkt i de generelle resultater fra kapitel 5. Resultaterne af analysen sammenlignes endvidere med numeriske resultater. I kapitel 8 diskuteres de resultater vi har opnået angående strømningen omkring en cylinder, specielt med fokus på disse resultaters status. Endelig indeholder kapitel 9 en opsamling af projektets resultater.

2 Topologisk fluidmekanik

Udgangspunktet for dette projekt er en metode, hvor den kvalitative teori for dynamiske systemer anvendes på strømningsmønstre for inkompressible væsker. Denne metode kaldes af nogle af sine udøvere topologisk fluidmekanik, og det har vi også valgt at gøre. Den måde, vi arbejder med topologisk fluidmekanik på, ligger i forlængelse af M. Brøns og J. Hartnacks arbejde (se f.eks Brøns [2001] og Hartnack [1999b]).

Formålet med topologisk fluidmekanik er at analysere hvilke forskellige strømningsmønstre, der kan ligge i nærheden af hinanden og specielt hvilke overgange, der kan findes mellem forskellige strømningsmønstre.

Udgangspunktet for den topologiske analyse er altid et ustabilt strømingsmønster. Det vil sige et strømningsmønster, som kun eksisterer for et eksakt sæt af parameterværdier, og derfor et strømningsmønster som ikke vil være fysisk realiserbart. I nærheden af det ustabile strømningsmønster ligger der imidlertid forskellige stabile strømningsmønstre. De stabile strømningsmønstre kan kun ændre sig ved at passere et ustabilt strømningsmønster, og derfor kan man opnå et overblik over hvilke overgange, der er mulige mellem forskellige stabile strømningsmønstre ved at beskrive de ustabile strømningsmønstre.

Formålet med dette og næste kapitel er at give en matematisk præsentation af den topologiske fluidmekanik. Dette skal dels være baggrund for de teoretiske resultater i kapitel 5, og dels benyttes i den topologiske analyse som vi foretager i kapitel 6. Den kvalitative teori for dynamiske systemer, som topologisk fluidmekani bygger på, er behandlet i en lang række lærebøger, for eksempel Grimshaw [1990], Robinson [1999] og Guckenheimer & Holmes [1983], og præsenteret med henblik på anvendelse i topologisk fluidmekanik i Hartnack [1999b] og Bakker [1991]. Da der findes meget litteratur på området, har vi valgt en fremstilling der sigter snævert på anvendelse i topologisk fluidmekanik for todimensionel inkompressibel strømning. Som vi vil vende tilbage til, er den matematiske konsekvens af at strømningen er todimensionel og væsken inkompressibel, at systemet er Hamiltonsk. Den teori vi præsenterer gælder derfor generelt for todimensionelle Hamiltonske differentialligningssystemer. De resultater, som gælder mere generelt vil blive præsenteret generelt, således at det er tydeligt, hvornår de pågældende antagelser er af betydning.

Det er en vigtig egenskab ved den toplogiske fluidmekanik, at den er lokal. Den udtaler sig om lokale egenskaber ved et strømningsmønster, og siger altså ikke noget om den fulde væskestrømning. Samtidigt er det også kun de strømningsmønstre, der ligger i en omegn af det oprindelige ustabile strømningsmønster, som bestemmes. Det lokale gennemsyrer hele teorien, og i afsnit 3.4 prøver vi at redegøre for, hvordan det egentlig skal forstås, og hvilken betydning det har.

2.1 Grundlæggende forudsætninger

En væske i et domæne $U \subseteq \mathbf{R}^n$ beskrives ved et vektorfelt $\boldsymbol{v}$, der angiver hastigheden som funktion af positionen i væsken, og hvis strømningen ikke er stationær, vil vektorfeltet endvidere være tidsafhængigt. Det vil sige at vi har:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{2.1.1}$$

hvor $\boldsymbol{x} \in U$, $t \in I$ og $\boldsymbol{f} : I \times U \to \mathbf{R}^n$, hvor $I \subset \mathbf{R}$. Funktionen $\boldsymbol{f}$ skal opfylde bevægelsesligningen for en væske, Navier-Stokes ligning, hvilket vi flere gange vil vende tilbage til. Som udgangspunkt antager vi imidlertid kun, at væsken er inkompressibel og opfylder kontinuitetsligningen, hvilket medfører at $\boldsymbol{f}$ skal være *divergensfri*:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0, \text{ for alle } t \in I, \text{ og } \boldsymbol{x} \in U. \tag{2.1.2}$$

Med udgangspunkt i ethvert givet tidspunkt, t_0 defineres $\boldsymbol{f}_{t_0} : U \to \mathbf{R}^n$ som $\boldsymbol{f}_{t_0}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x})$ og denne funktion er *den genererende funktion* i det autonome ordinære differentialligningssystem vi analyserer:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(\tau)}{d\tau} = \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_{t_0}(\boldsymbol{x}(\tau)) \tag{2.1.3}$$

For et fastholdt tidspunkt t_0 har vi altså et stationært vektorfelt $\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x})$, og det vi studerer er dynamikken i det differentialligningssystem, som dette vektorfelt genererer. Differentialligningssystemet er i $\boldsymbol{x}(\tau)$, hvor τ er en parameter[1].

Vi antager at $\boldsymbol{f}_{t_0}$ er en passende glat funktion, altså at $\boldsymbol{f}_{t_0} \in C^k$ for $k \geq 1$ passende[2] stor.

I det følgende behandler vi ikke $\boldsymbol{f}$, men altid $\boldsymbol{f}_{t_0}$ og lader derfor fodtegns t_0-et være underforståaet.

2.1.1 Et Hamiltonsk system

I to dimensioner bliver differentialligningssystemet i ligning 2.1.3 Hamiltonsk, hvilket betyder, at en række forskellige ting bliver enklere end i det mere generelle tilfælde.

[1]Bemærk at $\boldsymbol{x}$ benyttes i to forskellige betydninger: $\boldsymbol{x}$ betegner dels en τ afhængig funktion, når $\boldsymbol{x}$ indgår i et differentialligningssystem, og dels et punkt i $\mathbf{R}^n$.

[2]Med passende stor mener vi, at vi til enhver tid vælger et k, så de ønskede differentiationer kan lade sig gøre.

Definition 2.1.1 (Hamiltonsk system)
Lad $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ være åben og lad $\psi : U \to \mathbf{R}$ være C^2. Da kaldes differentialligningssystemet

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\,, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{2.1.4}$$

et autonomt[3] *Hamiltonsk system og funktionen ψ kaldes for systemets Hamiltonfunktion.*

Sætning 2.1.2 (I to dimensioner er divergensfrit ensbetydende med Hamiltonsk)
Lad $U \subset \mathbf{R}^2$ og lad $\boldsymbol{f} : U \to \mathbf{R}^2$ være genererende funktion for et differentialligningssystem. Da er differentialligningssystemet Hamiltonsk hvis og kun hvis $\boldsymbol{f}$ er divergensfri.

Bevis
Den ene vej er sætningen oplagt, og kan desuden nemt generaliseres til $2n$-dimensioner.

Det antages at systemet er Hamiltonsk, og det ses ved indsætning at den genererende funktion er divergensfri:

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \tag{2.1.5}$$

$$\Downarrow \tag{2.1.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0. \tag{2.1.7}$$

Den anden vej er beviset lidt længere, og det kan ikke generaliseres.

Det antages at den genererende funktion, $\boldsymbol{f}$, for systemet

$$\dot{x} = f(x,y)\,, \; \dot{y} = g(x,y)$$

er divergensfri:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Et vilkårligt område $D \subset U$ med randen ∂D betragtes. Her udnyttes den todimensionelle versionen af divergensteoremet til at danne et kurveintegral:

$$0 = \int\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{\partial D} (f\, dy - g\, dx) \tag{2.1.8}$$

Da kurve integralet hermed giver nul for enhver lukket kurve, er det uafhængigt af vejen. Kurveintegralet definerer derfor en funktion af sted (op til en arbitrær konstant):

$$\psi(x,y) = \int (f\, dy - g\, dx.) \tag{2.1.9}$$

[3]Hvis funktionen ψ afhænger af tiden (i vores notation τ) er systemet stadig Hamiltonsk, blot ikke autonomt.

Endvidere ses det ved differentiation at denne er en Hamiltonfunktion for systemet. [Grimshaw, 1990, s. 288-289] □

Da differentialligningssystemet i ligning 2.1.3 er genereret af en divergensfri funktion er systemet Hamiltonsk.

2.2 Strømning og topologisk ækvivalens

For autonome differentialligningssystemer gælder følgende sætning angående eksistens og entydighed af løsninger:

Sætning 2.2.1 (Eksistens og entydighed)
Lad $U \subset \mathbf{R}^n$ være en åben mængde og lad funktionen $\boldsymbol{f} : U \to \mathbf{R}^n$ være C^1. Lad $\boldsymbol{x}_0 \in U$ og $\tau_0 \in \mathbf{R}$. Da findes et $\alpha > 0$ og en løsning $\boldsymbol{x}(\tau)$ til $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ defineret for $\tau_0 - \alpha < \tau < \tau_0 + \alpha$ sådan at $\boldsymbol{x}(\tau_0) = \boldsymbol{x}_0$. Desuden gælder det, at hvis $\boldsymbol{y}(\tau)$ er en anden løsning med $\boldsymbol{y}(\tau_0) = \boldsymbol{x}_0$, så er $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{y}(\tau)$ i deres fælles definitions interval omkring τ_0. Robinson [1999, s. 143]

Systemet i ligning 2.1.3 opfylder per antagelse de nødvendige betingelser, og der eksisterer altså entydige løsninger. Vi kan nu definere strømningen givet ved differentialligningen [4].

Definition 2.2.2 (Strømningen genereret af $\boldsymbol{f}$)
Funktionen $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau) : U \times I \to \mathbf{R}^n$, der opfylder

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau_0)) \tag{2.2.1}$$

for alle $\tau_0 \in I$ og $\boldsymbol{x} \in U$ kaldes strømningen genereret af $\boldsymbol{f}$. [Guckenheimer & Holmes, 1983]

For et fastholdt $\boldsymbol{x}_0$ giver $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0, \tau) = \boldsymbol{x}(\tau)$ en kurve parametriseret i τ. Denne kurve er løsningskurven for differentialligningen 2.1.3 med begyndelsesværdien $\boldsymbol{x}_0$. Kurverne benævnes med forskellige termer, f.eks. banekurven, og specielt i topologisk fluidmekanik kaldes de *strømlinjer*.

For en stationær væskestrømning, det vil sige når $\boldsymbol{f}$ i ligning 2.1.1 ikke afhænger af tiden, svarer strømlinjerne til *partikelbanekurverne*. Partikelbanekurverne er, som beskrevet i indledningen, positionen som funktion af tiden for en partikel der starter i positionen $x = x_0$. I almindelighed er der dog ikke sammenfald mellem strømlinjer og partikelbanekurver, og for at skelne eksplicit bruges undertiden betegnelsen *de instantane strømlinjer*.

[4] Ordet strømning benyttes gennem denne rapport i to betydninger, dels i den præcise matematiske betydning som præsenteres her, og dels i betydning væskestrømning (specielt i forbindelse med tidslige periodiske væskestrømninger).

Da strømningen illustreret ved strømlinjerne viser, hvordan væsken bevæger sig til et givent tidspunkt, er det netop forskellige former af strømninger man undersøger når man arbejder med topologisk fluidmekanik. Man anvender følgende ækvivalens begreb når man ønsker at skelne mellem "ens" og forskellige strømninger.

Definition 2.2.3 (Topologisk ækvivalens)
En strømning $\boldsymbol{\varphi} : U \times I \to \mathbf{R}^n$ ($U \subset \mathbf{R}^n$) siges at være topologisk ækvivalent (i området U) med en anden strømning (i området V) $\boldsymbol{\zeta} : V \times I \to \mathbf{R}^n$ ($V \subset \mathbf{R}^n$) hvis der findes en homeomorfi[5] *$\boldsymbol{h} : \mathbf{R}^n \leftrightarrow \mathbf{R}^n$ med $\boldsymbol{h}(U) = V$ og en reparametriseringsfunktion $\alpha : \mathbf{R} \times U \to \mathbf{R}$ sådan at $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \alpha(\tau, \boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \tau)$ for alle $\boldsymbol{x} \in U$ og for alle $\tau \in \mathbf{R}$, og hvor $\alpha(\tau, \boldsymbol{x})$ for hvert fastholdt $\boldsymbol{x}$ er en monoton stigende surjektiv funktion af τ. [Robinson, 1999]*

Denne definition siger, at to strømninger er topologisk ækvivalente [6], hvis der findes en afbildning som sender banekurver fra den ene til den anden med tidens retning bevaret[7]. Senere i dette kapitel vil vi komme lidt nærmere ind på, hvad definitionen betyder, og hvorfor det er en god definition i forbindelse med en kvalitativ beskrivelse af væskestrømning.

Mængden af strømninger, som er topologisk ækvivalente, kaldes en strømningstopologi (alternativt en strømlinjetopologi eller blot en topologi). Fokus i topologisk fluidmekanik er altid på skift mellem topologier, og aldrig på variationer mellem strømningerne inden for en enkelt topologi.

2.2.1 Strømlinjer i et Hamiltonsk system

Da det er strømlinjerne der er i fokus for analysen, er det væsentligt at kunne illustrere disse. For et Hamiltonsk system kan strømlinjerne findes direkte ud fra Hamiltonfunktionen.

Sætning 2.2.4 (Strømlinjerne ligger på ækvi-kurver for Hamiltonfunktionen)
For et autonomt Hamiltonsk system er Hamiltonfunktionen konstant langs en strømlinje. Med notation som tidligere vil det sige at $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} = 0$ langs strømlinjer.

Bevis

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\psi}{\partial \tau}$$

[5] Invertibel kontinuert afbildning med kontinuert invers.
[6] Vi benytter også betegnelse *ens* om topologisk ækvivalente strømninger.
[7] I praksis bekymrer vi os ikke om tidens retning, da den ikke har nogen betydning for illustrationen af topologien, og fordi tidens retning let kan ændres hvis man ønsker det.

Definition 2.1.1 udnyttes ved at indsætte ligning 2.1.4:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{2.2.2}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0 \tag{2.2.3}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af at ψ per antagelse er uafhængig af τ. Grimshaw [1990, s. 283] □

Denne egenskab ved Hamiltonfunktionen spiller en central rolle i vores konkrete arbejde i de senere kapitler. Efterfølgende vil vi derfor ofte benytte ordet *strømlinjefunktion*[8] i stedet for Hamiltonfunktion. Det har også den fordel at man undgår associationer til mekanik, hvor Hamiltonfunktionen er energien, for et system uden dissipation.

2.2.2 Kritiske punkter

De kritiske punkter, og typen af disse, er helt central for beskrivelsen af forskellige strømninger.

Definition 2.2.5 (Kritisk punkt)
Et punkt $\boldsymbol{x}_c$ som opfylder $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_c) = 0$ kaldes et kritisk punkt (eller fikspunkt) for differentialligningssystemet 2.1.3.

I væskestrømning svarer et kritisk punkt til et stagnationspunkt, det vil sige et punkt, hvor væsken ikke bevæger sig. Et kritisk punkt er i sig selv en strømlinje i den forstand at strømningen sender det kritiske punkt i sig selv for alle τ.

For strømning ved en væg anvendes en anden definition. Det vil vi vende tilbage til i afsnit 3.1.1, hvor vi forklarer, hvordan væggen håndteres.

I illustrationerne af strømningerne tegner vi primært *seperatricer*. Seperatricer er de strømlinjer som går mod et kritisk punkt for $\tau \to \infty$ eller $\tau \to -\infty$. De når dog aldrig ind til det kritiske punkt, da dette selv er en strømlinje. Strømlinjefunktionens kontinuitet, og det faktum at seperatricerne når vilkårligt tæt på de kritiske punkter, betyder at strømlinjefunktionenen antager samme værdi i det kritiske punkt som på seperatricerne.

2.2.3 Topologiske egenskaber ved strømning

I definition 2.2.3 gav vi en formel definition af, hvad det vil sige, at to strømninger er ækvivalente. Vi vil her diskutere nogle af de konsekvenser denne definition har.

[8] På engelsk; stream function.

Konsekvensen, af at to strømninger er ækvivalente, er at man skal kunne deformere den ene strømning til den anden på en kontinuert måde eventuelt sammensat med en spejling.

Når vi illustrerer strømninger, ønsker vi altid at lave en samlet illustration af en given strømningstopologi, snarere end en detaljeret beskrivelse af den enkelte strømning. Vi vil derfor indtegne netop de karakteristika, som er fælles for alle strømninger med den givne topologi. Vi vil her kort diskutere disse karakteristika.

I den formelle definition at ækvivalens indgår en homeomorfi som sender banekurver fra den ene strømning til banekurver i den anden. Det betyder at kritiske punkter sendes i kritiske punkter, og seperatricer i seperatricer. Det ses på denne baggrund, at topologisk ækvivalente strømninger vil have det samme antal kritiske punkter. Specielt vil to strømninger uden kritiske punkter være topologisk ækvivalente. Når to seperatricer mødes i et kritisk punkt, kan dette ske på to måder. Deres tangentretning kan enten være den samme eller den kan være forskellig. Dette karakteristika vil også være bevaret i topologisk ækvivalente strømninger.

At to strømninger har de samme karakteristika er naturligvis ikke nok til at de er topologiske ækvivalente. Et eksempel kan være, at en seperatrice fra et kritisk punkt kan ligge på forskellige måder i forhold til andre kritiske punkter i væsken. To sådanne strømninger kan have præcis det samme antal kritiske punkter og typer af seperatricer, uden at være topologisk ækvivalente.

Almindeligvis kan man på en kontinuert måde gå fra en strømning til en ækvivalent strømning uden at passere en topologisk forskellig strømning, der er dog undtagelser. Specielt er det ikke altid muligt at komme fra en strømning til den spejlede strømning, uden at passere en topologisk forskellig strømning. Dette vil der være eksempler på i afsnit 6.5.

2.3 Karakterisering af strømning ved den lineære del

Når man skal undersøge strømningstopologien i nærheden af et kritisk punkt, kan man i særligt godartede tilfælde nøjes med at se på systemets lineære del. I dette afsnit vil vi nå frem til at karakterisere, hvornår denne simplificering er mulig. Vi vil samtidig beskrive strømningstopologierne, når disse er bestemt af den lineære del.

I det lineariserede system, er det egenværdierne, der bestemmer typen af det kritiske punkt. Derfor starter vi med at se på, hvad man kan sige om egenværdierne til Jacobimatricen for den genererende funktion.

Vi starter med at rækkeudvikle den genererende funktion, f, for et Hamiltonsk differentialligningssystem omkring et kritisk punkt x_c. Hvis vi kræver at $\boldsymbol{f}$ mindst er C^2, kan vi skrive $\boldsymbol{f}$ som

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c) \tag{2.3.1}$$

hvor A er Jacobimatricen for $\boldsymbol{f}$ evalueret i $\boldsymbol{x}_c$ og $\boldsymbol{N}$ er $O(2)$ [9].

Det forhold, at A er Jacobimatricen for et Hamiltonsk system, lægger bånd på egenværdierne for A. Der er tre forskellige situationer.

Sætning 2.3.1 (Typer af egenværdier i et kritisk punkt)
Lad A være Jacobimatricen for et Hamiltonsk system. Da er der tre situationer

- *A har to kompleks konjugerede rent imaginære egenværdier,* $|A| > 0$.
- *A har to reelle egenværdier,* $\lambda_1 = -\lambda_2$, *hvor* $\lambda_1 \neq 0$ *og* $\lambda_2 \neq 0$, $|A| < 0$.
- *A har to egenværdier der er nul,* $|A|$ *=0.*

Bevis
Jacobimatricen er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}$$

og egenværdierne er løsninger til andengradsligningen:

$$0 = \lambda^2 - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} \tag{2.3.2}$$

$$\Updownarrow \tag{2.3.3}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y}}. \tag{2.3.4}$$

Da de størrelser der indgår på højresiden af ligning 2.3.4 er reelle følger resultatet. □

2.3.1 Det lineariserede system

Det lineariserede system hørende til det fulde system (ligning 2.1.3) er defineret som:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} \tag{2.3.5}$$

hvor A er Jacobimatricen for det fulde system evalueret i det kritiske punkt og $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c)$. Det lineariserede system har per konstruktion et kritisk punkt i origo, og dette punkts type er ifølge standard resultater for lineære differentialligningssystemer (se f.eks Boyce & DiPrima [1997]) bestemt ved egenværdierne til matricen A.

På baggrund af sætning 2.3.1 ses det at typen af det kritiske punkt, for den lineariserede del af et Hamiltonsystem, er bestemt af $|A|$ på følgende måde:

[9] Vi benytter notationen $O(k)$ på følgende måde: hvis en funktion $f(x)$ er $O(k)$ (underforstået i x) betyder det at $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$ = konstant.

$|A| > 0$: Det kritiske punkt er et lineært-center

$|A| < 0$: Det kritiske punkt er en saddel

2.3.2 Hvornår den lineære del er styrende

Efter nu at have karakteriseret de kritiske punkter for et system der er lineariseret (omkring det givne kritiske punkt), vil vi se på hvornår den lineære del er bestemmende for typen af det egentlige kritiske punkt.

Sætning 2.3.2
For Hamiltonske systemer er typen af det kritiske punkt bestemt af systemets lineære del såfremt Jacobideterminanten ikke er nul.

Beviset for dette resultat falder naturligt i to dele, hvor den første er et generelt resultat, og det andet er et specialresultat for Hamiltonske systemer i to dimensioner.

Kritiske punkter kan klassificeres som hyperbolske eller ikke-hyperbolske ud fra følgende definition

Definition 2.3.3 (Hyperbolsk kritisk punkt)
Et kritisk punkt $\boldsymbol{x}_c$ kaldes hyperbolsk hvis Jacobimatricen (A) (evalueret i det kritiske punkt) ikke har egenværdier med realdel nul.

Følgende sætning giver det ønskede resultat for hyperbolske kritiske punkter.

Sætning 2.3.4 (Hartman-Grobman)
Lad $\boldsymbol{x}_c$ være et hyperbolsk kritisk punkt for det ikke-lineære system (2.1.3), og lad A være den tilhørende Jacobimatrix, da er strømningen hørende til det ikke-lineære system og strømningen hørende til det lineariserede system (2.3.5) topologisk ækvivalente i en omegn omkring $\boldsymbol{x}_c$.

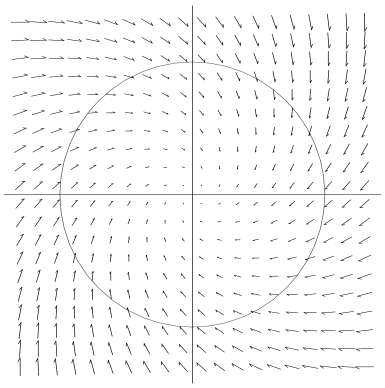
Dette er et af hovedresultaterne for generelle differentialligningssystemer (se f.eks. Guckenheimer & Holmes [1983] eller Robinson [1999]).

Hvis egenværdierne til det lineariserede system er rent imaginære, et det kritiske punkt et center i det lineariserede system. Hartman-Grobman sætningen gælder ikke for denne type punkter. Dette skyldes, at højereordensledene i systemet (jvf. opskrivningen ligning 2.3.1) kan perturbere det kritiske punkt, sådan at det bliver et spiralpunkt [Boyce & DiPrima, 1997].

En sådan perturbation er imidlertid ikke mulig i et Hamiltonsk system. Hvis man betragter et område (D) tæt på et spiralpunkt, må hastighedsfeltet lokalt se ud som på figur 2.1. Hvis man integrerer strømningen ud af området op, får man ved brug af den todimensionelle version af divergensteoremet:

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dl = \int_D \nabla \cdot \boldsymbol{f} da \tag{2.3.6}$$

hvor $\boldsymbol{n}$ er en enheds normalvektor til integrationskurven. Hvis væsken spiralerer væk fra punktet, vil det første integral oplagt være større end 0 (og tilsvarende mindre end 0 hvis den spiralerer ind). Dette er i modstrid med at $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$, og dermed kan vi ikke have spiralpunkter i divergenfri systemer og altså specielt ikke i et todimensionelt Hamiltonsk system [10].



Figur 2.1 Det lokale hastighedsfelt ved et spiralpunkt, samt randen af området D.

Dette giver andledning til følgende sætning:

Sætning 2.3.5 (To imaginære egenværdier giver et center)
Lad $|A|$ være Jacobideterminanten for et Hamiltonsk system evalueret i et kritisk punkt. Da er det kritiske punkt et center hvis $|A| > 0$.
(Se Hartnack [1999b] for alternativt bevis.)

Det er nu klart at kritiske punkters type er bestemt af egenværdiernes type (jvf sætning 2.3.1), hvis Jacobideterminanten evalueret i det kritiske punkt er forskellig fra nul.

Vi ved altså nu, at for kritiske punkter i Hamiltonske systemer gælder, at hvis Jacobideterminanten evalueret i det kritiske punkt er forskellige fra nul, er strømninger i en omegn af det kritiske punkt bestemt af egenværdiernes type.

For sadler vides det, fra sætning 2.3.4, at der findes en omegn omkring det kritiske punkt, hvor den fulde strømning er ækvivalent med strømningen genereret af det lineariserede system. Det ses dermed, at alle sadler må være ækvivalente, da man kan transformere et diagonaliserbart lineært system til et andet.

For centre vides det at de er stabile overfor højereordensled, og ud fra geometrien af et center ses det at alle centre må være ækvivalente.

[10] Vi fandt tidligere, at man for et Hamiltonsk system ikke kan have nodepunkter (da man ikke kan have to reelle egenværdier med samme fortegn). Dette kan også ses at dette argument, da nodepunkter i denne sammenhæng har de sammen egenskaber, som et spiralpunkt

2.4 Strukturel stabilitet af en strømningstopologi

Vi har, blandt andet i indledningen til dette afsnit, været inde på, at en strømning kan være stabil eller ustabil. Vi er nu nået til at give en præcis formulering af dette begreb. Vi skal dog først bruge en afstandsdefinition.

Definition 2.4.1 (Afstanden mellem to strømninger)
Afstanden mellem to strømninger genereret af to C^1 funktioner, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ og $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, defineret på et lukket domæne, $\boldsymbol{x} \in U \subset \mathbf{R}^n$, er givet ved

$$d = \sup_{x \in U} \left\{ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| + \left| \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right| \right\} \tag{2.4.1}$$

Hartnack [1999b]

Definition 2.4.2 (Strukturel stabilitet)
En strømning, $\boldsymbol{\varphi}$ genereret af en C^1 funktion, kaldes strukturelt stabilt i et område $U \subset \mathbf{R}^n$, hvis der eksisterer et δ således, at en vilkårlig anden strømning, $\boldsymbol{\varphi}'$, hvorom det gælder at $d(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}') < \delta$ i U, er topologisk ækvivalent med $\boldsymbol{\varphi}$ i U. [Hartnack, 1999b]

Disse to definitioner betyder, at hvis en strømningstopologi er uændret ved en tilpas lille perturbation kaldes strømningen strukturelt stabilt.

Det er vigtigt at bemærke at strukturel stabilitet afhænger af, hvilke typer perturbationer man tillader. Som eksempel kan nævnes at lineære centre, som vi tidligere har antydet, er stabile i Hamiltonske systemer, men ikke stabile i almindelighed.

Vi vil i resten af dette afsnit se på hvilke strømninger, der er strukturelt stabile, og hvilke der er ustabile. I mange sammenhænge vil det afhænge af om de indgående kritiske punkter er degenererede eller ikke-degenererede.

Definition 2.4.3 (Degenereret og ikke-degenereret kritisk punkt)
Lad S være et Hamiltonsk todimensionelt differentialligningssystem. Da kaldes et kritisk punkt for S degenereret, hvis Jacobideterminanten evalueret i det kritiske punkt er nul. Hvis Jacobideterminanten er forskellig fra nul kaldes det kritiske punkt ikke-degenereret.

2.4.1 Stabile strømninger

Der er to situationer, hvor der med sikkerhed vides at strømningen er strukturelt stabil.

Sætning 2.4.4 (Ikke-degenererede kritiske punkter er strukturelt stabile)
Lad $\boldsymbol{x}_c$ være et ikke-degenereret kritisk punkt (for et Hamiltonsk system). Da eksisterer der en omegn omkring $\boldsymbol{x}_c$, hvor strømningen er strukturelt stabil. Hartnack [1999b]

Essensen i beviset for denne sætning er, at egenværdierne for Jacobmatricen evalueret i det kritiske punkt afhænger kontinuert af den genererende funktion. Siden egenværdierne er strengt forskellige fra nul vil de for tilstrækkeligt små perturbationer af den genererende funktion ikke ændre type (jvf sætning 2.3.1). Da egenværdierne bestemmer typen af det kritiske punkt, ændrer det dermed ikke type for tilstrækkeligt små perturbationer.

Vi har tidligere set, at de ikke-degenererede kritiske punkters type er bestemt af deres lineære del alene. Som det også fremgår af beviset for deres strukturelle stabilitet, er disse to egenskaber nært knyttede. Således kan man i en passende omegn af det kritiske punkt betragte højereordensledene af den genererende funktion i ligning 2.3.1 som en tilstrækkelig lille perturbation af den genererende funktion i ligning 2.3.5.

Foruden ikke-degenererede kritiske punkter er også strømninger helt uden kritiske punkter strukturelt stabile. Den genererende funktion er forskellig fra nul i hele området, og det vil den, pga. kontiunitet, vedblive med at være, hvis man lægger en tilstrækkeligt lille perturbation til.

2.4.2 Degenererede strømninger

Strømninger der indeholder degenererede kritiske punkter vil være strukturelt ustabile [Hartnack, 1999b]. Deres eksistens er betinget af, at egenværdierne for Jacobimatricen evalueret i det kritiske punkt er præcis nul, og en vilkårlig lille perturbation af den genererende funktion vil kunne ændre dette.

På trods af at teorien generelt er lokal støder vi også på strømninger der er strukturelt ustabile på grund af *globale* forhold. Dette vil typisk være situationer, hvor den samme seperatrice ender i to forskellige kritiske punkter. Dette kræver at strømlinjefunktionen har *præcis* samme værdi i de to kritiske punkter, hvilket igen er et krav, som kan brydes med en vilkårlig lille perturbation af strømfunktionen.

De strukturelt ustabile strømninger kan ikke observeres i virkeligheden, fordi de forsvinder i samme øjeblik som de opstår. Derfor er de ikke interessante at undersøge i sig selv. Det interessante ligger som før sagt, i at en strukturelt stabil strømning kun kan ændre topologi ved at passere en strukturel ustabilt strømning.

Analysen af hvilke overgange, der kan findes består derfor i at bestemme under hvilke forudsætninger, der findes strukturelt ustabile strømninger, samt at kortlægge hvilke strukturelt stabile strømningstopologier, der ligger i nærheden af disse.

2.4.3 Udfoldning og kodimension

Når det bestemmes hvilke strømningstopologier, der ligger i nærheden af en given strukturelt ustabil strømning, gøres det ved at finde en udfoldning af den strukturelt ustabile strømning.

Definition 2.4.5 (Udfoldning, versal og miniversal)
En lokal familie af funktioner $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$, hvor $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^k$, som er defineret i en omegn af $(\boldsymbol{x}_c, \mathbf{0})$, hvor det gælder at $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mathbf{0}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ kaldes en udfoldning af strømningen genereret af $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ omkring punktet $\boldsymbol{x}_c$.

Hvis alle strømninger, som findes ved en vilkårlig lille perturbation[11], af $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ er topologisk ækvivalente (i en omegn af $\boldsymbol{x}_c$) med en funktion i udfoldningen kaldes udfoldningen versal.

Det minimale antal parametre, som er nødvendige i en versal udfoldning af et punkt $\boldsymbol{x}_c$, kaldes punktets kodimension.

Hvis antallet af parametre i en versal udfoldning af et punkt $\boldsymbol{x}_c$ svarer til punktets kodimension, kaldes udfoldningen miniversal.

Hartnack [1999b]

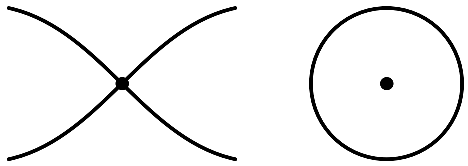
En udfoldning illustreres ved et *udfoldningsdiagram*. I praksis er det nemmest at gøre dette for en toparameter-udfoldning eller til nød for en treparameter-udfoldning. I udfoldningsdiagrammet er parametrene på akserne, og til hvert punkt i diagrammet hører den strømning som genereres af $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$, ved den givne værdi af $\boldsymbol{\alpha}$. Det betyder at den degenererede strømning som udfoldes hører til origo. Resten af diagrammet er delt op i områder som indeholder strukturelt stabile strømninger, og alle strømninger i et område er topologisk ækvivalente. I en toparameter-udfoldning er områderne med strukturelt stabile strømninger adskilt af kurver. Parameterværdierne på disse kurver svarer til degenererede strømninger, der har kodimension en. Tilsvarende er områderne med strukturelt stabile strømninger adskilt af flader i en kodimension tre udfoldning. De strømninger, som hører til disse flader, er degenererede med kodimensioner en. Fladerne krydser hinanden i kurver, og de strømninger, som hører til disse kurver, har kodimension to.

Normalt taler man kun om udfoldningen af et kritisk punkt. Som vi før har været inde på, kan man imidlertid også have strømninger som er degenererede på grund af globale forhold. Disse strømninger er det naturligvis også interessantat at udfolde. Dette falder i almindelighed uden for den teori som vi beskæftiger os med, da en globalt degenereret strømning ikke har den lokale karakter, som er krævet. Hvis man er i den situation, at den globalt degenererede strømning findes i udfoldningen af et degenereret kritiske punkt, er det dog i nogen grad muligt at betragte en del af den samlede udfoldning som en udfoldning af den globalt degenererede strømning. Vi vil senere i forbindelse med behandlingen af den valgte case komme mere ind på dette.

2.5 Oversigt over stabile strømninger

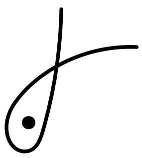
Få figur 2.2 ses en illustration af de to simple stabile strømlinjetopologier.

[11] Bemærk at her kan der også være forskel på, hvilke perturbationer som tillades.



Figur 2.2 Kritisk punkt af type saddel og center. For saddel er tegnet seperatricer, og for centeret er en enkelt strømlinje vist.

Ud over disse simple topologier, findes også strømningstopologier med globale egenskaber som er stabile. På figur 2.3 ses en saddel med en såkaldt homoklinisk strømning. Denne konfiguration består af en saddel og et center. At den konfiguration er stabil skyldes at strømlinjefunktionen automatisk antager samme værdi på seperatricer fra et givent kritisk punkt (konfigurationens stabilitet bevises i Hartnack [1999b]). Denne topologi kaldes i denne rapport for en sløjfe.



Figur 2.3 Homoklinisk forbindelse ved saddel (sløjfe).

3 Topologisk fluidmekanik i praksis

I dette kapitel vil vi redegøre for, hvordan vi i praksis arbejder med de teoretiske begreber, vi har præsenteret i forrige kapitel. Specielt forklares det, hvordan vi finder og analyserer en udfoldning af strømningen omkring et givent degenereret kritisk punkt. Undervejs vil vi gentagene gange gøre brug af et gennemgående eksempel, som er simpelt samtidig med, at det belyser en række centrale metoder og problemer.

Afslutningsvis vil vi med udgangspunkt i det gennemgående eksempel diskutere, hvorvidt vi kan være sikre på rigtigheden af vores resultater, samt hvad det mere præcist vil sige, at teorien giver lokale resultater.

3.1 Taylorrækker, randbetingelser og krav

Vi antager, at strømlinjefunktionen er C^{k+1} hvor $k > 1$, og k vælges så stor, som vi har behov for i en given konkret situation. Det gør det muligt at opskrive strømlinjefunktionen som:

$$\psi = \sum_{i+j=1}^{k} \psi_{i,j} x^i y^j + O(k+1). \tag{3.1.1}$$

De antagelser, der skal bruges i forbindelse med den topologiske fluiddynamik, formuleres som antagelser omkring koefficienterne i denne Taylorrække. Når vi i kapitel 5 undersøger om der er begrænsninger på hvilke strømningstopologier, der kan eksistere i nærheden af en Hopfbifurkation, vil disse krav også blive formuleret som krav på koefficienterne i en Taylorrække.

3.1.1 Den grundlæggende randbetingelse - væggen

I alle de konkrete strømlinjefunktioner vi betragter antager vi, at der er en væg ved $y = 0$. Dette skyldes, at den strømning som vores projekt tager udgangspunkt i, foregår i nærheden af en væg, nemlig bag en cylinder. Strømning ved en væg er behandlet i Bakker [1991], Hartnack [1999b] og Hartnack [1999a]. I de to sidstnævnte referencer tages der højde for, at væggen kan være buet, og det vises, at denne frihed ikke har betydning for den lokale topologi. Det har altså ingen betydning for vores resultater, at vi lokalt beskriver den oplagt buede cylinder med en lige væg.

Antagelsen om, at der er en væg ved $y = 0$, giver anledning til nogle krav på ψ. Disse krav "kan ikke se" om væsken er under eller over x-aksen. Man kan altså generere strømninger både under og over x-aksen ud fra en given strømlinjefunktion, som opfylder kravene til, at der er en væg ved x-aksen.

Det skal understreges at over- og underside af væggen er fysisk fuldstændigt adskildt. I nogle situationer vil man imidlertid kunne behandle to forskellige matematisk relaterede strømninger samtidigt ved at analysere begge sider af væggen. I en sådan analyse er det vigtigt at bemærke, at hvis et kritisk punkt krydser x-aksen, svarer det til at antallet af kritiske punkter ændres i de to halvplaner. Der forsvinder et kritisk punkt fra den ene halvplan, og der opstår et i det andet. Dette er altså en overgang fra en topologi til en anden.

Vi vil nu beskrive, hvilken betydning det har for strømlinjefunktionen, at der er en væg i systemet.

Det er en standard randbetingelse i fluiddynamik, at væsken ikke kan bevæge sig langs med væggen helt inde ved væggen. Det skyldes, at væggen står stille, og at væsken "klistrer" til væggen. Dette kaldes "no slip" randbetingelsen.

Lad (u, v) være hastighedsfeltet genereret af strømlinjefunktionen ψ, da betyder no slip randbetingelsen at:

$$u(x, 0) = 0 \tag{3.1.2}$$

Da $u(0, 0) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(0, 0) = \psi_{0,1}$ giver det direkte at $\psi_{0,1} = 0$. Men da randbetingelsen i ligning 3.1.2 giver at $\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0)$ er en konstant som funktion af x fås også

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial y}(0, 0) = \psi_{i,1} = 0.$$

Hastigheden vinkelret på væggen er også nul. Det skyldes, at der ikke kan strømme væske gennem væggen. Dette kaldes "no flux" randbetingelsen. Det betyder

$$v(x, 0) = 0$$

og dermed også

$$\frac{\partial^i\psi}{\partial x^i}(0, 0) = \psi_{i,0} = 0.$$

Det betyder, at vi med randbetingelserne har reduceret strømfunktionen til følgende.

$$\psi = \sum_{i+j=0}^{k} \psi_{i,j+2}x^i y^{j+2} + O(k + 3) \tag{3.1.3}$$

De første led i det tilhørende differentialligningssystem bliver derfor

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2\psi_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2\psi_{1,2} & 3\psi_{0,3} \\ 0 & -\psi_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(3). \tag{3.1.4}$$

Randbetingelserne betyder, at alle punkter langs med væggen er kritiske punkter set ud fra den definition vi gav i afsnit 2.2.2. Ved væggen er det imidlertid ikke alle stagnationspunkterne, der topologisk set er lige interessante. Derfor anvendes en skærpet definition.

Ved at reparametrisere τ med $\tau' = \alpha(\tau, x, y)$, hvor $\alpha = y\tau$ fås følgende dynamiske system:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\psi_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\psi_{1,2} & 3\psi_{0,3} \\ 0 & -\psi_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(2). \tag{3.1.5}$$

Hvis reparametriseringsfunktionen opfylder de krav, som vi kræver til en reparametriseringsfunktion i definition 2.2.3, ændrer systemets banekurver sig ikke ved en sådan transformation. Det betyder, at strømningen for det tidsreparametriserede system er topologisk ækvivalent med strømningen for det oprindelige system.

Den reparametriseringsfunktion som vi her har anvendt, opfylder oplagt[1] kravene når $y \neq 0$. Bortset fra på x-aksen er systemet i ligning 3.1.5 altså topologisk ækvivalent med det oprindelige system (ligning 3.1.4).

Vi definerer nu et kritisk punkt ved væggen, på baggrund af dette system.

Definition 3.1.1 (Kritisk punkt ved væggen)
Lad et dynamisk system være givet som i ligning 3.1.4. Lad $\mathbf{x}_c = (x, 0)$ være et kritisk punkt ifølge definition 2.2.5 for det tidsreparametriserede system i ligning 3.1.5. Da kaldes $\mathbf{x}_c$ et kritisk punkt på væggen i det oprindelige system, ligning 3.1.4.

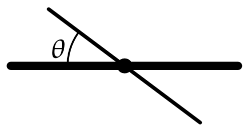
Den strukturelle stabilitet af disse kritiske punkter vil på baggrund af ækvivalensen mellem de to systemer, afhænge af deres stabilitet i det reparametriserede system.

Udover at vi altid betragter situationer, hvor der er en væg, vælger vi altid $\psi_{0,2} = 0$. Dette svarer til at flytte koordinatsystemet sådan, at det kritiske punkt ligger i origo. Hvis $\psi_{1,2} \neq 0$ er det kritiske punkt ikke-degenereret. Det betyder, at topologien af systemet er bestemt alene af de førsteordensled, der er med i ligning 3.1.5.

Hvis $\psi_{1,2} = 0$ og $\psi_{0,3} \neq 0$ kaldes det kritiske punkt simpelt degenereret. Hvis $\psi_{1,2} = \psi_{0,3} = 0$ kaldes punktet ikke-simpelt degenereret. Punkterne kan endvidere være degenererede i forskellig grad (af forskellig orden) afhængigt af hvilke højereordenskoefficienter, der er forskellige fra nul. I Hartnack [1999b] og Hartnack [1999a] laves en generel analyse af simpelt degenererede kritiske punkter ved en væg. Det vises blandt andet, at det er den første koefficient af formen $\psi_{j,2}$, som er forskellig fra nul, der bestemmer hvor degenereret et simpelt kritisk punkt er.

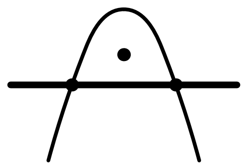
Der findes kun en type strukturelt stabile kritiske punkter ved en væg. Den strømningstopologi, som findes ved et sådant kritisk punkt er illustreret i figur

[1] Bemærk dog at tidens retning vendes i tilfældet $y < 0$.



Figur 3.1 Ikke-degenereret kritisk punkt ved væg.

3.1. Det kan nemt findes at vinklen er givet ved $\tan\theta = -\frac{\psi_{1,2}}{\psi_{0,3}}$. Der eksisterer endvidere en simpel stabil global topologi ved en væg. Det er den såkaldte seperationsboble som ses på figur 3.2. Stabiliteten af denne skyldes, at strømlinjefunktionen antager den samme værdi alle steder på væggen.



Figur 3.2 Seperationsboble.

3.1.2 Eksempel, første del

Det eksempel, vi vil bruge som illustration i dette kapitel, er et simpelt degenereret kritisk punkt i origo, hvor det yderligere kræves, at $\psi_{2,2} \neq 0$. Det er et simpelt degenereret punkt af laveste orden, og behandlingen af det, er lavet på baggrund af Hartnack [1999b] og Hartnack [1999a].

I alt har vi altså kravene $\psi_{0,2} = \psi_{1,2} = 0$, $\psi_{0,3} \neq 0$ og $\psi_{2,2} \neq 0$. Det vil sige, at strømlinjefunktionen får formen.

$$\psi = \psi_{0,3}y^3 + \psi_{0,4}y^4 + \psi_{1,3}xy^3 + \psi_{2,2}x^2y^2 + O(5). \tag{3.1.6}$$

3.2 Normalformstransformation

Efter at strømlinjefunktionen og det dynamiske system er konstrueret ønsker vi, forud for analysen, at få udtrykkene på en simplere form. Dette gøres ved en koordianttransformation. Almindeligvis kaldes en sådan transformation for en normalformstransformation, og den opnåede strømlinjefunktion og det dynamiske system kaldes *normalformer*. Der er ikke nogen præcis definition af en normalform, og normalformen er ikke entydig, men med en normalform menes en form der er så enkel som mulig.

En koordinattransformation ($\boldsymbol{h} : \mathbf{R}^2 \leftrightarrow \mathbf{R}^2$, hvor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ og $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$) af det dynamiske system (jvf. ligning 2.1.3) giver et dynamisk system i de transformerede variable:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\ \dot{\boldsymbol{x}}\right) \circ \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{f}\right) \circ \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.2.1}$$

Det er selvfølgeligt vigtigt, at det dynamiske system i de transformerede variable er topologisk ækvivalent med det oprindelige system. Dette er automatisk opfyldt, hvis koordinattransformationen er en homeomorfi. Dette resultat er naturligvis ikke meget overraskende, men samtidigt er det også meget centralt, og vi har derfor valgt at præcisere det.

Sætning 3.2.1 (Koordinattransformation giver topologisk ækvivalens)
Lad det dynamiske system $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ generere en strømning $\boldsymbol{\varphi}(x, \tau)$. Lad $\boldsymbol{h}$ være en homeomorfi, som definerer transformationen $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, og den inverse transformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$. Det transformerede dynamiske system

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{f}\right) \circ \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.2.2}$$

(hvor det sidste lighedstegn skal læses som en definition af $\boldsymbol{g}$) genererer da en strømning $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ som er topologisk ækvivalent med $\boldsymbol{\varphi}$.

Bevis
Ækvivalensen mellem de to strømninger er ensbetydende med

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau) = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \tau)) \tag{3.2.3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau) = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \tau). \tag{3.2.4}$$

Vi viser derfor at $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau)$ opfylder definitionsligningen for $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau_1} &= \sum_i \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}),\tau_1)} \left.\frac{\partial \varphi_i(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_1} \right) \\
&= \sum_i \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}),\tau_1)} f_i(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau_1)) \right) \\
&= \sum_i \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{h}^{-1}\circ\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}),\tau_1)} f_i(\boldsymbol{h}^{-1} \circ \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau_1)) \right) \\
&= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{\xi}), \tau_1))
\end{aligned}$$

Hvor det næstsidste lighedstegn følger af at anvende identiteten i form af $\boldsymbol{h}^{-1} \circ \boldsymbol{h}$, to forskellige steder, og det sidste lighedstegn følger af definitionen på $\boldsymbol{g}$. □

3.2.1 Transformation af et Hamiltonsk system

Det afsnit bygger på Lautrup [1999], Goldstein [1972], Hartnack [1999b] og Grimshaw [1990] og trækker på en række standard resultater for Hamiltonske systemer.

I to dimensioner, hvor man som udgangspunkt har en strømlinjefunktion, er det endvidere ønskeligt, at det transformerede system også har en strømlinjefunktion. Transformationer, hvor dette er tilfældet, kaldes kanonisk transformationer. Det kan vises, at der for en kanoniske transformation findes en genererende funktion, S, så transformationen er givet ud fra denne. Der er fire mulige grundtyper af genererende fumktioner, men vi benytter kun den hvor transformationen $\boldsymbol{h} : \mathbf{R}^2 \leftrightarrow \mathbf{R}^2$, $(\boldsymbol{h} : (x, y) \to (\xi, \eta))$ er defineret ved

$$x = \frac{\partial S}{\partial y}\ , \quad \eta = \frac{\partial S}{\partial \xi}\ , \tag{3.2.5}$$

hvor $S : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(S(\tau, y, \xi))$. Det kan desuden vises, at hvis S ikke er eksplicit tidsafhængig[2] bliver det transformerede dynamiske system særlig let at opskrive:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial(\psi \circ \boldsymbol{h}^{-1})}{\partial \eta} \qquad \dot{\eta} = -\frac{\partial(\psi \circ \boldsymbol{h}^{-1})}{\partial \xi} \tag{3.2.6}$$

Ud fra ligning 3.2.5 ses det at man direkte finde (x, η) som funktion af (y, ξ). Man er naturligvis interesseret i at finder (x, y) som funktioner af (ξ, η) og omvendt. For at sikre at dette er muligt kræver man at

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0. \tag{3.2.7}$$

Som genererende funktion kan benyttes enhver funktion som er to gange differentiabel[3] og opfylder ovenstående krav.

Kravet om at $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0$ medfører, at implicit funktionssætningen giver, at den første ligning i 3.2.5 kan løses med hensyn til ξ i en omegn af $(0, 0)$, og at den fundne funktion er kontinuert. Herefter fås η ved at indsætte udtrykket for ξ i anden ligning. Tilsvarende kan $\boldsymbol{h}^{-1}$ konstrueres ved at starte med den anden ligning i 3.2.5.

Transformationen og dens inverse eksisterer altså i en omegn af $(0, 0)$, og de er kontinuerte, således at den konstruerede transformation er en homeomorfi.

Det vigtigste resultat for det videre arbejde formuleres i følgende sætning:

Sætning 3.2.2 (Strømlinjefunktionen er bevaret ved en kanonisk transformation) *Lad et dynamisk system være givet som i ligning 2.1.4 (hvor $n = 1$) og lad $\boldsymbol{h} : \mathbf{R}^2 \leftrightarrow \mathbf{R}^2$ være en tidsuafhængig kanonisk transformation, da er det transformerede dynamiske system givet ved ligning 3.2.6.*

Dette standard resultat bevises f.eks i Grimshaw [1990] og Goldstein [1972].

Da vi i det følgende altid benytter tidsuafhængige kanoniske transformationer, vil vi lade tidsuafhængigheden være underforstået, og blot kalde dem kanoniske transformationer.

[2] τ i vores notation.

[3] I praksis vil vi kræve, at S er C^k, hvor k er tilstrækkelig stor til, at vi kan rækkeudvikle S, $\boldsymbol{h}^{-1}$ og $\boldsymbol{h}$ til den orden vi har behov for.

3.2.2 Eksempel, anden del

I eksemplet behandler vi en strømlinjefunktion af formen:

$$\psi = \psi_{0,3}y^3 + \psi_{0,4}y^4 + \psi_{1,3}xy^3 + \psi_{2,2}x^2y^2 + O(5). \tag{3.2.8}$$

For at konstruere en kanonisk normalformstransformation indføres en generel genererende funktion:

$$S = \xi\, y + s_{0,3}y^3 + s_{1,2}\xi\, y^2 + s_{2,1}\xi^2 y + s_{3,0}\xi^3 \tag{3.2.9}$$

Denne genererende funktion opfylder oplagt kravet om at være to gange differentiabel samt $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi\partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0$, uafhængigt af værdierne på koefficienterne $s_{i,j}$. Ved brug af ligning 3.2.5 fås:

$$x = \xi + 3\,s_{0,3}y^2 + 2\,s_{1,2}\xi\, y + s_{2,1}\xi^2 \tag{3.2.10a}$$
$$\eta = y + s_{1,2}y^2 + 2\,s_{2,1}\xi\, y + 3\,s_{3,0}\xi^2 \tag{3.2.10b}$$

Den nederste ligning løses til anden orden med hensyn til y, og resultat indsættes i den øverste ligning. Resultatet[4] bliver

$$y = \eta - s_{1,2}\eta^2 - 2\,s_{2,1}\xi\,\eta - 3\,s_{3,0}\xi^2 + O(3), \tag{3.2.11a}$$
$$x = \xi + 3\,s_{0,3}\eta^2 + 2\,s_{1,2}\xi\,\eta + s_{2,1}\xi^2 + O(3). \tag{3.2.11b}$$

Det er tilstrækkeligt at regne til anden orden, selvom vi ønsker strømlinjefunktionen bestemt til fjerde orden fordi, der ikke er nulteordensled i udtrykkene for (x, y), og fordi den laveste orden i strømlinjefunktionen er tredje orden. Når udtrykkene for (x, y) indsættes i strømlinjefunktionen, ligning 3.2.8, fås:

$$\begin{aligned} \psi = {} & \psi_{0,3}\eta^3 + (-9\,\psi_{0,3}s_{3,0} + \psi_{2,2})\,\eta^2\xi^2 + \\ & (\psi_{1,3} - 6\,\psi_{0,3}s_{2,1})\,\eta^3\xi + (-3\,\psi_{0,3}s_{1,2} + \psi_{0,4})\,\eta^4 + O(5). \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Denne strømlinjefunktion giver et system, som er topologisk ækvivalent med det oprindelige uafhængigt af, hvordan koefficienterne $s_{i,j}$ vælges. For at opnå en simpel strømlinjefunktion vælges koefficienterne $s_{i,j}$ på følgende måde;

$$s_{3,0} = s_{0,3} = 0, \quad s_{1,2} = \frac{\psi_{0,4}}{3\psi_{0,3}}, \quad s_{2,1} = \frac{\psi_{1,3}}{6\psi_{0,3}}. \tag{3.2.13}$$

Valget af $s_{3,0} = 0$ skyldes, at det er nødvendigt for at bibeholde væggen langs ξ-aksen (jvf. ligning 3.2.11a). Valget af $s_{0,3} = 0$ er uden betydning, da $s_{0,3}$ ikke indgår i strømlinjefunktionen, (ligning 3.2.12). $s_{1,2}$ og $s_{2,1}$ er valgt sådan, at to af ledene i strømlinjefunktionen går ud. Ved indsættelse i ligning 3.2.12, fås strømlinjefunktionen:

$$\psi = \psi_{0,3}\eta^3 + \psi_{2,2}\eta^2\xi^2 + O(5). \tag{3.2.14}$$

[4] Resultat ser lidt anderledes ud i Hartnack [1999b], fordi indiceringen er forskellig.

Bemærk at de eneste Taylorkoefficienter som indgår, er dem som per antagelse er forskellige fra nul. Det er en grundlæggende forudsætning for at lave transformationen at $\psi_{0,3} \neq 0$ ($\psi_{0,3}$ indgår i nævnerne i ligning 3.2.13). Dette krav er opfyldt, fordi det antages at det degenererede punkt er simpelt degenereret. For ikke-simpelt degenererede kritiske punkter er det nødvendigt at anvende en anden transformation. Hvis $\psi_{2,2} = 0$ ville det være nødvendigt at medtage led af højere orden for at bestemme topologien af strømningen, og strømningen ville være degenereret af højere orden.

I og med at det antages, at $\psi_{2,2} \neq 0$ kan strømlinjefunktion gøres en lille smule pænere ved at dividere højresiden med $\psi_{0,3}$, samt at skalere ξ:

$$\xi \to \sqrt{\frac{|\psi_{0,3}|}{|\psi_{2,2}|}}\xi. \tag{3.2.15}$$

Dette giver

$$\psi \quad = \quad \eta^3 + \sigma\eta^2\xi^2 + O(5) \tag{3.2.16}$$

hvor

$$\sigma = 1 \text{ for } \frac{\psi_{0,3}}{\psi_{2,2}} > 0 \text{ og } \sigma = -1 \text{ for } \frac{\psi_{0,3}}{\psi_{2,2}} < 0. \tag{3.2.17}$$

De afsluttende operationer er ikke kanoniske transformationer, men svarer ialt til en reparametrisering af det dynamiske system $\tau \to \left(\psi_{0,3}\sqrt{|\psi_{2,2}|/|\psi_{0,3}|}\right)\tau$.

For at opnå en normalform, svarende til den som findes i Hartnack [1999b] skaleres τ endeligt med σ, hvilket giver følgende endelige resultat

$$\psi \quad = \quad \sigma\eta^3 + \eta^2\xi^2 + O(5) \tag{3.2.18}$$

Analysen af strømningen i nærheden af det degenererede kritiske punkt i origo laves på baggrund af den trunkerede normalform,

$$\psi \quad = \quad \sigma\eta^3 + \eta^2\xi^2. \tag{3.2.19}$$

Det ses, at der er to varianter af den stømning vi betragter, afhængigt af fortegnet på σ. Imidlertid giver spejlingen $\eta \to -\eta$ den samme strømning som fås ved at ændre fortegn på σ. Det vil altså sige, at effekten af at ændre fortegn på sigma blot er, at strømningen under ξ-aksen findes over ξ-aksen og omvendt. Vi behandler derfor kun tilfældet $\sigma = -1$.

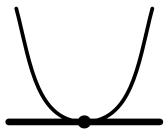
Strømlinjerne ligger som tidligere skrevet på ækvi-kurver for strømlinjefunktionen, og specielt har strømlinjefunktionen på seperatricer samme værdi, som i det kritiske punkt de går imod. På væggen er strømlinjefunktionen altid nul. Seperatricerne findes derfor som de kurver, hvor strømlinjefunktionen er nul samtidig med, at de ikke er på væggen, det vil sige $\psi = 0$ og $\eta \neq 0$.

Af den trunkerede strømlinjefunktion 3.2.19 ses, at seperatricerne er bestemt ved

$$\eta = -\sigma\xi^2 \text{ for } \eta \neq 0. \tag{3.2.20}$$

Det vil sige, at der er to seperatricer, der mødes i det kritiske punkt på væggen, og som tilsammen danner en parabel.

Strømningstopologien er illustreret i figur 3.3. Seperatricerne for $\sigma = -1$ ses over ξ-aksen. Der er ingen seperatricer under ξ-aksen.



Figur 3.3 Simpelt degenereret kritisk punkt ved væggen, samt seperatricer.

3.3 Kodimension og udfoldning

For at konstruere en udfoldning af en given degenereret strømning indfører vi små parametre istedet for de Taylorkoefficienter som skulle være nul for at opnå den degenererede situation. Samtidig beholder vi tidligere krav om, at nogle bestemte koefficienter skal være forskellige fra nul. Såfremt de led der er af højere orden ikke har betydning vil den hermed opnåede udfoldning være versal per konstruktion. Vi vender, i afsnit 3.4, tilbage til hvorvidt højereordensledene faktisk er uden betydning. I dette afsnit vil vi illustrere, hvordan man med en normalformstransformation kan mindske antallet af parametre og analysere den opnåede udfoldning.

3.3.1 Eksempel, tredje del

Vi tager igen udgangspunkt i strømlinjefunktionen i ligning 3.2.8, men indfører to led i strømlinjefunktionen ved at lade $\psi_{0,2}$ og $\psi_{1,2}$ være to små[5] parametre istedet for at kræve de er nul.

$$\psi_{0,2} = \varepsilon_{0,2}, \quad \psi_{1,2} = \varepsilon_{1,2}. \tag{3.3.1}$$

De koefficienter som var nul på grund af væggen skal imidlertid stadig være nul. Man kan således sige, at udfoldningen konstrueres under den bibetingelse, at væggen vedbliver at være der. Det giver følgende strømlinjefunktion

$$\psi = \varepsilon_{0,2}\eta^2 + \varepsilon_{1,2}\xi\eta^2 + \psi_{0,3}y^3 + \psi_{0,4}y^4 + \psi_{1,3}xy^3 + \psi_{2,2}x^2y^2 + O(5). \tag{3.3.2}$$

[5]Med små menes blot, at parameterværdierne ligger i en omegn af 0.

Der konstrueres nu en parameterafhængig kanonisk transformation med henblik på at finde en normalform. Dette gøres i princippet på samme måde som vi beskrev det i afsnit 3.2.2. Da vi også beskriver den tilsvarende procedure i afsnit 6.3 og 6.4, hvor den udfoldning, vi har arbejdet med behandles, vil vi her gøre det ganske kort. Flere detaljer findes i Hartnack [1999a].

Der benyttes en genererende funktion af følgende form:

$$S = y\xi + \sum_{i+j+k+l=3} s_{i,j,k,l}\xi^i y^j \varepsilon_{0,2}^k \varepsilon_{1,2}^l \tag{3.3.3}$$

Der differentieres og løses for x og y til anden orden i ξ, η, $\varepsilon_{0,2}$ og $\varepsilon_{1,2}$, og de opnåede udtryk for x og y indsættes i strømlinjefunktionen. Koefficienterne, $s_{i,j,k,l}$ vælges sådan, at x-aksen sendes i ξ-aksen, og sådan at flest mulige led i strømlinjefunktionen går ud. Herefter laves en translation langs ξ-aksen, hvilket oplagt er uden betydning for topologien. Systemet reparametriseres endelig på præcis samme måde som systemet i afsnit 3.2.2. Resultatet er følgende normalform

$$\psi = c_{0,2}\eta^2 + \sigma\eta^3 + \eta^2\xi^2 + O(5), \tag{3.3.4}$$

hvor $c_{0,2}$ er en transformeret udfoldningsparameter, og hvor $O(5)$ nu refererer til led der er af femte orden eller højere i ξ, η, $\varepsilon_{0,2}$ og $\varepsilon_{1,2}$ tilsammen.

I Hartnack [1999b] og Brøns [2001] er det den gennemgående fremgangsmåde at betragte rækkeudviklingen i, og restledene fra, ξ, η og ε samlet. Denne metode fungerer imidlertid ikke for udfoldningen af den degenererede strømning vi har behandlet (se afsnit 6.4), og vi vil derfor kort forklare hvordan restledet ser ud når ξ og η og ε betragtes hver for sig. $O(5)$-ledene i ligning 3.3.4 indeholder, blandt andet, led af tredje og lavere orden, i ξ og η (ligesom de led der blev tilføjet ved konstruktionen af udfoldningen i ligning 3.3.2), men disse led vil mindst[6] være af anden orden i ε. $O(5)$-ledene indeholder også led af første orden i ε, men disse led vil mindst være af fjerde orden i ξ og η. De led der ses bort fra ved at fjerne $O(5)$-ledene er altså enten af anden orden eller derover i ε eller af højere orden i ξ og η end de led der tilføjes i forbindelse med konstruktionen af udfoldningen.

Det trunkerede system, som fås ved at fjerne $O(5)$-ledene, har formen:

$$\psi = c_{0,2}\eta^2 + \sigma\eta^3 + \eta^2\xi^2, \tag{3.3.5}$$

og det er denne normalform, som anvendes når strømningen analyseres. Bemærk at normalformen reducerer til normalformen for det degenererede system for $c_{0,2} = 0$. Valget af normalformstransformation afgør som tidligere nævnt formen af normalformen. Det skal imidlertid altid være sådan, at når udfoldningsparameteren er nul er strømningen den samme som den degenererede strømning (jvf. definition 2.4.5). I praksis er det naturligvis hensigtsmæssigt at konstruere normalformstransformationen af udfoldningen således, at den indeholder normalformen af det degenererede system.

[6] Naturligvis vil deres orden i ε mindst være tre, hvis man specielt betragter andenordensled i ξ og η og så fremdeles.

Det dynamiske system er efter skalering af τ med $\tau \to \eta\tau$ givet ved

$$\dot{\xi} = 3\sigma\eta + 2c_{0,2} + 2\xi^2 \quad (3.3.6)$$
$$\dot{\eta} = -2\eta\xi. \quad (3.3.7)$$

Som ved den degenererede strømning betragtes alene situationen $\sigma = -1$, da det modsatte tilfælde fås ved at betragte strømningen under ξ-aksen.

Kritiske punkter i væsken findes ved at antage $\eta \neq 0$, og sætte $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = (0, 0)$. Der findes et kritiske punkt i væsken for både $c_{0,2} < 0$ og $c_{0,2} > 0$. Det ligger i:

$$(\xi, \eta) = \left(0, \frac{2}{3}c_{0,2}\right). \quad (3.3.8)$$

Typen af dette punkt afgøres ved, at bestemme fortegnet på Jacobideterminanten evalueret i det kritiske punkt (jvf. sætning 2.3.1). Punktet er en saddel for $c_{0,2} > 0$ og et center for $c_{0,2} < 0$.

For $c_{0,2} < 0$ er der to kritiske punkter på væggen ($\eta = 0$) i positionerne

$$(\xi, \eta) = (\pm\sqrt{-c_{0,2}}, 0) \quad (3.3.9)$$

mens der for $c_{0,2} > 0$ ikke eksisterer kritiske punkter på væggen.

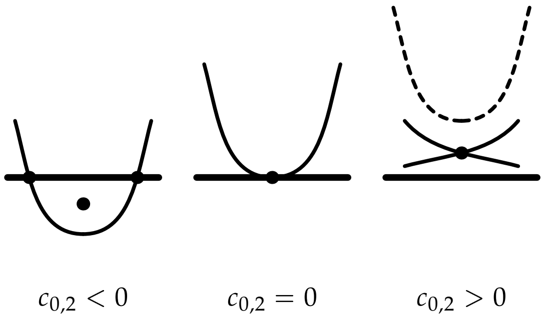
Slutteligt fokuserer vi på de seperatricer, der er i kontakt med kritiske punkter på væggen. De findes som i afsnit 3.2.2 som strømlinjefunktionens nulkurver væk fra væggen. De ses umiddelbart at være givet ved

$$\eta = \xi^2 + c_{0,2}, \quad (3.3.10)$$

hvilket svarer til, at den parabel seperatricerne for den degenererede strømning danner, er blevet parallelforskudt op eller ned alt efter fortegnet på $c_{0,2}$. For $c_{0,2} < 0$, forskydes parablen nedaf og seperatricer krydser derfor ξ-aksen to forskellige steder; i de to kritiske punkter på væggen. Bemærk at i strømningen under ξ-aksen er der en separationsboble (jvf afsnit 2.5), da der er to kritiske punkter som er forbundet via en seperatrice. Denne forbindelse er strukturelt stabil, fordi strømlinjefunktionen automatisk har samme værdi i to kritiske punkter på væggen.

For $c_{0,2} > 0$ forskydes parablen opad. Den er (per konstrukton) stadig en nulkurve for strømlinjefunktionen, men den består ikke længere af seperatricer, fordi kurven ikke længere er i kontakt med de kritiske punkter på væggen (eller med andre kritiske punkter).

Udfoldningsdiagrammet ses i figur 3.4. Da der kun er en parameter i udfoldningen, er de områder, hvor der findes strukturelt stabile strømninger (jvf. afsnit 2.4.3), linjestykker. Linjestykkerne er adskildt af origo, som jo er den parameterværdi, der svarer til den degenererede strømning.



Figur 3.4 Enparameter-udfoldningen af simpelt kritisk punkt ved væg. Den stiplede kurve i figuren til højre er ikke en seperatrice, men blot en nulkurve for strømlinjefunktionen.

3.3.2 Kommentar angående kodimension

Parametre der "forsvinder" på grund af en normalformstransformation er uden betydning, og den transformerede udfoldning vil stadig være versal. Vi benytter ikke noget teoretisk resultat til at godtgøre, at den transformerede udfoldning er miniversal. I eksemplet ovenfor, er det oplagt, at udfoldningen er miniversal og at kodimensionen faktisk er én da de strømningstopologier, som indeholdes i udfoldningen ikke kan findes med nul parametre.

3.4 Resultaternes gyldighed

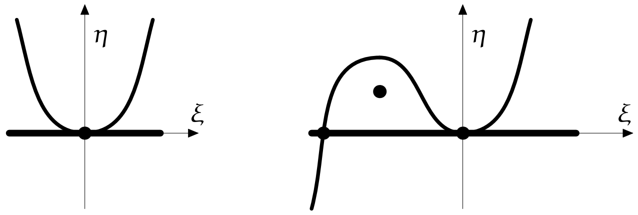
I analysen af såvel den degenererede strømning som af udfoldningen ses der bort fra højereordensled i Taylorrækken for strømlinjefunktionen. Det er ikke trivielt at vise, at denne trunkering af Taylorrækken ikke fjerner væsentlige egenskaber ved den degenererede strømning, specielt er det svært at vise at udfoldningen bliver fuldstændig. Spørgsmålet er ikke behandlet i den litteratur vi har læst, og det er udenfor dette projekts ramme at behandle det generelt. Istedet vil vi, med udgangspunkt i det eksempel, vi har brugt i dette kapitel, diskutere hvordan vi forstår betydningen af trunkeringen. Specielt vil vi lægge vægt på, at det er teoriens lokale karakter, der gør en analyse på baggrund af de trunkerede systemer meningsfuld . Det er ikke muligt at udtale sig om globale egenskaber på baggrund af en trunkeret Taylorrække.

For det første er alle strømninger vi omtaler som ækvivalente kun ækvivalente i en omegn af origo. I eksemplet anden del (afsnit 3.2.2) så vi, at seperatricerne for det trunkerede system var parabler. Det kan vises at, hvis man betragter det fulde system bliver seperatricerne givet ved

$$\eta = \xi^2 + k_3\xi^3 + k_4\xi^4 + O(5), \tag{3.4.1}$$

hvor k_i'erne kan være forskellige fra nul, men ikke nødvendigvis er det, og deres værdi afhænger af formen på de højereordensled, der er indeholdt i ψ.

For både det trunkerede og det fulde system er der et kritisk punkt i origo, hvorfra der udgår to seperatricer. For begge systemer gælder, at den kurve seperatricerne danner har første afledte (evalueret i det kritiske punkt) som er nul, og anden afledte forskellige fra nul. Det ses altså at i en omegn af det kritiske punkt har de to kurver, dannet af seperatricerne, de samme kvalitative egenskaber. De højereordensled har altså ikke betydning for den lokale topologi omkring origo. Væk fra origo er situationen imidlertid en anden. I det fulde system kan der være kritiske punkter, som ikke findes i det trunkerede system. I figur 3.4 er seperatricerne for det trunkerede system illustrerede sammen med et eksempel på, hvordan seperatricerne for det fulde system kunne se ud.



Figur 3.5 Seperatrice for det degenererede trunkerede system og et eksempel på, hvordan seperatricerne kunne se ud når systemet ikke er trunkeret.

Ud over at resultaterne er lokale i (ξ, η)-planet er de også lokale i parameterrummet. Det vil sige, at det kun er i en omegn af origo i parameterrummet, at de strømninger som findes eksisterer, ligesom det kun er i en omegn af origo i parameterrummet, at udfoldningen er versal.

I afsnit 3.3.1 beskrev vi, at udfoldningsparameteren c_0's effekt er at sænke eller hæve seperatrice-parablen. Hvis man betragter figur 3.4, kan man forestille sig, hvordan det lokalt ved origo vil have samme effekt, at sænke eller hæve seperatrice-kurven lidt, for henholdsvis det trunkerede og det fulde system. Hvis man hæver eller sænke seperatrice-kurverne meget, hvilket svarer til at bevæge sig langt væk fra origo i parameterrummet, vil strømningen kunne se helt forskellig ud for henholdsvis det trunkerede og det fulde system, selvom man er tæt på origo i (ξ, η)-planet.

I udfoldningen af det fulde system vil udtrykket for seperatricen (svarende til ligning 3.4.1, men nu i en version med udfoldningsparametre) også kunne få et parameterafhængigt førsteordensled (i ξ). Dette led vil ændre formen af seperatricen, når udfoldningsparametrene ændres. Dette led vil imidlertid mindst afhænge kvadratisk af udfoldningsparametrene. Da nulteordensledet (i ξ) er et førsteordensled i udfoldningsparametrene, vil de topologier som opstår ved at ændre på udfoldningsparameterene fortsat være de samme, blot man begrænser sig til tilstrækkelig små udfoldningsparametre.

De omegne omkring origo i henholdsvis udfoldningsparameterrummet og (ξ, η)-planet, hvor de resultater som findes på baggrund af det trunkerede system, gælder for det fulde system, afhænger af, hvordan ledene i det fulde system ser ud. Det eneste man generelt kan sige er, at ækvivalensen mellem det trunkerede og det fulde system kun kan gælde i en omegn omkring origo.

I det videre arbejde vil vi fokusere på, at alt hvad vi finder findes i en vilkårlig lille omegn af origo. Det vil sige, at alle linjer og planer i udfoldningsdiagrammet skal indeholde origo. Ligeledes skal positionen af alle interessante elementer i strømningen bevæge sig ind mod origo i (ξ, η)-planet når parameter-vektoren går mod origo i parameterrummet.

4 Hopfbifurkation

Som beskrevet i indledningen, er der ved et givent Reynoldstal (ca. 42) en overgang fra stationær til periodisk strømning, bag en cylinder. Denne type overgange (bifurkationer) kan blandt andet ske ved en såkaldt Hopfbifurkation.

Formålet med dette projekt, er at undersøge om det har nogen betydning for de mulige strømlinje topologier, hvis der er en Hopfbifurkation i en væskestrømning. Derfor vil vi give en gennemgang af, hvad en Hopfbifurkation er, samt beskrive en metode, der udtaler sig om, hvordan en førsteordens- eller i princippet højereordensapproksimation til den periodiske løsning ser ud.

Kapitlet er lavet med udgangspunkt i Grimshaw [1990], Marsden & McCracker [1976], Iooss & Joseph [1980] og Iooss & Adelmeyer [1992].

4.1 Hopfbifurkation for ODE systemer

Teorien for Hopfbifurkationer har sit udspring i teorien for ordinære differentialligningssystemer, og det er også i denne ramme, at det er lettest at forstå, hvad der foregår.

Udgangspunktet er et parameterafhængigt ordinært differentialligningssystem ($\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\mu)$) hvor $\mu \in \mathbf{R}$, og hvor $\boldsymbol{x} \in R^n, n \geq 2$, med et kritisk punkt i $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Generelt kan positionen af det kritiske punkt afhænge af parameteren, men ved en parameterafhængig translation af systemet kan det bringes til at ligge i origo for alle parameterværdier.

Hvis $\boldsymbol{f} \in C^2$ kan man, som vi før har udnyttet, skrive systemet på følgende form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(\mu)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x};\mu) \tag{4.1.1}$$

hvor A er Jacobimatricen for $\boldsymbol{f}$ evalueret i $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, og N er $O(2)$ i $\boldsymbol{x}$. Fra teorien for ordinære differentialligninger vides det, at stabiliteten[1] af det kritiske punkt i de fleste situationer er bestemt af egenværdierne for $A(\mu)$. Hvis alle egenværdier har en realdel, som er skarpt mindre end nul, vil punktet være asymptotisk stabilt. Hvis blot en egenværdi har en realdel, som er skarpt større end nul er

[1] Bemærk at den stabilitet som der her tales om, ikke har noget at gøre med den strukturelle stabilitet som blev diskuteret i forrige kapitel. Det er her det normale stabilitetsbegreb fra teorien for ordinære differentialligninger, hvor man skelner mellem stabile, asymptotisk stabile og frastødende (ustabile) kritiske punkter.

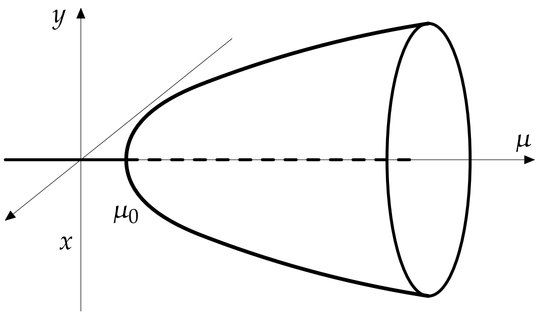
punktet ustabilt. Hvis der findes egenværdier med realdel nul, og der ikke er nogen egenværdier med positiv realdel, kan stabiliteten af det kritiske punkt ikke bestemmes fra den lineære del.

Hvis et sæt af kompleks konjugerede egenværdier for A,

$$(\lambda(\mu), \lambda^*(\mu)) = (\alpha(\mu) + i\beta(\mu), \alpha(\mu) - i\beta(\mu)),$$

ved $\mu = \mu_0$ har den egenskab at $\alpha(\mu_0) = 0$,$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu_0} > 0$ og $\beta(\mu_0) \neq 0$, (altså at de som funktion af μ krydser den imaginære akse fra højre ved μ_0), og det samtidig gælder, at de resterende egenværdier har negativ realdel i en omegn af μ_0, vil den stationære løsning være stabil for $\mu < \mu_0$ og ustabil for $\mu > \mu_0$. Hopfs sætning siger, at der samtidig med dette skift i stabilitet opstår en tiltrækkende periodisk løsning i nærheden af den stationære løsning. Denne form for bifurkation kaldes en Hopfbifurkation. Der opstår også en bifurkation, hvis realdelen af egenværdierne krydser den imaginære akse fra højre mod venstre, men det vi ønsker at betragte er den situation, hvor den periodiske løsning, som opstår, er stabil.

På figur 4.1 ses en illustration af en Hopfbifurkation for et todimensionelt dynamisk system. Illustrationen er meningsfuld i almindelighed, fordi Hopfbifurkationen essentielt er todimensionel.



Figur 4.1 Illustration af Hopfbifurkation. Den fuldtoptrukne linje langs μ-aksen illustrerer den stabile stationære løsning før Hopfbifurkationen. Den stiplede linje viser den ustabile stationære løsning efter Hopfbifurkationen. Den liggende paraboloide illustrerer den periodiske løsning, som vokser frem efter bifurkationen. Ved Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling af ordinære differentialligningssystemer kan det generelt vises, at radius af den periodiske løsning vokser med $\sqrt{\mu - \mu_0}$.

4.2 Generalisering af Hopfbifurkation

I dette afsnit ser vi på et generelt parameterafhængigt partielt differentialligningssystem, som er af første orden i tiden,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = F(\mu)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.2.1}$$

hvor $F(\mu)$ er en parameterafhængig operator[2], som virker på $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, og hvor systemet er defineret på et givent domæne med passende kendte (evt. parameterafhængige) randbetingelser. I nogle tilfælde kan man generalisere resultater fra teorien for ordinære differentialligninger, til denne situation.

$\boldsymbol{v}$ tilhører et funktionsrum. I vores konkrete tilfælde er $\boldsymbol{v}$ i rummet af todimensionelle divergensfrie vektorfelter, som er defineret på et givent domæne og opfylder de rigtige randbetingelser. Den partielle differentialligning, generere nu på samme måde som et ordinært differentialligningssystem en banekurve, hvis man har en given begyndelsesbetingelse $\boldsymbol{v}_0$. Her er banekurven blot i det relevante funktionsrum.

Et punkt $\boldsymbol{v}_c$ siges, at være et kritisk punkt, hvis $F(\mu)\boldsymbol{v}_c = 0$. Det vil sige, at de stationære løsninger til differentialligningen, er de kritiske punkter.

Tilsvarende kan man tale om den lineære del af en operator, og dennes egenværdier. Man kan generelt ikke være sikker på at egenværdierne findes som en diskret mængde. Det vil blandt andet afhænge af hvilket domæne differentialligningerne er defineret på, og typen af randbetingelseer. Vi vil imidlertid antage, at vi har en situation, hvor egenværdierne er en diskret mængde.

Der gælder nu en sætning om stabilitet af et kritisk punkt, som er analog til den i forrige afsnit beskrevne teori for ordinære differentialligningssystemer. Altså at stabiliteten af et kritisk punkt er bestemt af egenværdierne til den lineære del af operatoren F, hvis alle egenværdier har negativ realdel, eller hvis der findes mindst en egenværdi med positiv realdel. Måden den lineære del styrer på er også den samme som for ordinære differentialligningssystemer. [Marsden & McCracker, 1976, s. 6 og 7]

Når den partielle differentialligning er parameterafhængig, vil dels positionen af de kritiske punkter og dels deres stabilitet oplagt blive afhængig af parameteren. Det giver derfor mening at tale om bifurkationsteori for partielle differentialligninger. Dette er der flere, som har arbejdet med (se f.eks Marsden & McCracker [1976]), men specielt har G. Iooss arbejdet med dette problem i forbindelse med Navier-Stokes ligning. Under passende betingelser (her under den klassiske Hopf-antagelse om at to egenværdier krydser den imaginære akse, og alle andre egenværdier har negativ realdel) får han et resultat som svarer til Hopfbifurkationen for ODE-systemer. Det vil sige, at det kritiske punkt skifter stabilitet, og at der opstår en periodisk løsning i nærheden af dette [Marsden & McCracker, 1976, kapitel 9A], [Iooss & Joseph, 1980].

Hvis man betragter den fysiske bifurkation som sker i væskestrømningen omkring en cylinder, svarer den til det man ser ved en Hopfbifurkation. En stationær stabil løsning holder op med at være stabil samtidig med at der opstår en periodisk løsning som er tiltrækkende[3].

I det resterende af denne rapport vil vi undersøge, hvilke konsekvenser det har for topologierne i en strømning, hvis det antages, at der sker en Hopf-

[2]Indeholder f.eks differentiation med hensyn til sted.

[3]Stabiliteten af løsningerne i det fysiske system kendes, fordi man aldrig kan observere en ustabil stationær løsning eller en frastødende periodisk løsning over en længere tidsperiode.

bifurkation i løsningen til Navier-Stokes ligning. Som case vil vi specielt se på strømningen bag en cylinder, der som tidligere omtalt ofte bliver beskrevet som et eksempel på en Hopfbifurkation.

Vi vil ikke tage stilling til, om vi rent faktisk har en situation, hvor resultaterne kan anvendes eller om der virkelig er tale om en Hopfbirfukation.

4.3 Poincaré-Lindstedt rækker

I dette afsnit gør vi rede for en metode, hvor den periodiske løsning efter en Hopfbifurkation kan bestemmes som en funktionsrække.

Metoden hedder Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling, og den minder meget om den metode som Hopf benyttede i sit originale bevis (se kapitel 5 i Marsden & McCracker [1976]). Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling er altså en metode, der oprindeligt er udviklet i teorien for ordinære differentialligninger.

Vi antager, at vi kan overføre Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling til partielle differentialligninger, specielt Navier-Stokes ligningen, defineret på et passende domæne med randbetingelser. Poincaré-Lindstedt rækkeudviklingsmetoden er også benyttet på generelle systemer af Iooss og Joseph [Iooss & Joseph, 1980, Kapittel VIII.3], og en metode af denne type anvendes af G. Iooss i hans arbejde omkring Hopfbifurkationer i løsninger til Navier-Stokes ligning [Marsden & McCracker, 1976, kapitel 9A].

4.3.1 Antagelser

Som udgangspunkt betragtes et system som i ligning 4.2.1, altså en parameterafhængig partiel differentialligning, som er af første orden i tiden, og som er defineret på et domæne med passende randbetingelser.

Det er en nødvendig betingelse for vores anvendelse af Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling i praksis, at den lineære del kan opskrives eksplicit[4]. I starten af næste kapitel vi vi godtgøre at Navier-Stokes ligning anvendt på en perturbation i forhold til en stationær løsning, kan skrives på følgende form:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathrm{L}(\mu)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{N}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)) \tag{4.3.1}$$

hvor $\mathrm{L}(\mu)$ er en parameterafhængig lineær del og $\mathrm{N}(\cdot,\cdot)$ er en parameteruafhængig bilineær del. Vi begrænser os derfor til systemer af denne form.

Det antages at $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \mathbf{0}$ er den stationære løsning, som er interessant at betragte. Hvis dette ikke er tilfældet, men den interessante stationære løsning er

[4]Generelt skal ledene i operatoren være bestemt til samme orden, som de led i Poincaré-Lindstedt rækken man ønsker at udtale sig om.

givet for alle μ, $\boldsymbol{v_0}(\mu)$, kan dette som før bemærket opnås ved en translation: $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{v_0}(\mu)$. Denne translation[5] vil påvirke $\mathrm{L}(\mu)$, $\mathrm{N}(\boldsymbol{v})$ og randbetingelserne, og således er det ikke det oprindelige system vi betragter, men netop differentialligningen og randbetingelserne for en perturbation i forhold til den faktiske stationære løsning $\boldsymbol{v_0}(\mu)$.

Endelig antages det, at der er en Hopfbifurkation ved $\mu = \mu_0$. Det betyder blandt andet, at et par af kompleks konjugerede egenværdier $(\lambda(\mu), \lambda^*(\mu))$, med $\lambda = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ for $\mathrm{L}(\mu)$, krydser den imaginære akse $(\lambda(\mu_0) = i\beta_0)$ mens alle andre egenværdier har negativ realdel.

4.3.2 Rækkeudviklingen

Når man benytter Poincaré-Lindstedt metoden rækkeudvikler man de relevante størrelser i en ny parameter ε.

Da perioden af den periodiske løsning afhænger af bifurkationsparameteren, defineres som det første en ny skaleret tid, således at de periodiske løsninger får perioden 2π i den skalerede tid, θ:

$$\theta = \frac{t2\pi}{T(\mu)} \iff \theta = \omega(\mu)t \tag{4.3.2}$$

hvor ω er vinkelfrekvensen for den periodiske løsning, og $T(\mu)$ er den parameterafhængige periodetid.

Vi definerer $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t(\theta))$ og får således

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t(\theta))}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t(\theta)} \frac{\partial t}{\partial \theta} \tag{4.3.3}$$

Ved brug af ligning 4.3.1 og 4.3.2, fås

$$\omega \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t(\theta)} = \mathrm{L}(\mu)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta) + \mathrm{N}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)). \tag{4.3.4}$$

Bifurkationsparameteren, μ, rækkeudvikles nu i den nye parameter ε, således at $\varepsilon = 0$ svarer til bifurkationspunktet. Det betyder at nulteordensledet netop er μ-værdien ved bifurkationen, μ_0:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2 + ... \tag{4.3.5}$$

Dermed bliver også $\omega(\mu)$ og løsningerne til differentialligningen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)$ funktioner af ε. Disse rækkeudvikles også i ε

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta) = \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta)\varepsilon + \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x},\theta)\varepsilon^2 + ... \tag{4.3.6}$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + ... \tag{4.3.7}$$

[5]Bemærk at translationen generelt også vil gøre N afhængig af μ, selvom den ikke var det i udgangspunktet. For Navier-Stokes bliver den ikke-lineære del imidlertid ikke parameter afhængig ved denne translation.

og det kræves at $\boldsymbol{v}_n$ er 2π-periodisk for alle n, samt at de ligger i samme funktionsrum som $\boldsymbol{v}$.

Rækken for $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)$ har intet nulteordensled, fordi ved $\varepsilon = \mu = 0$ er vi ved den stationære løsning $\mathbf{0}$. De tre rækker i ε kan nu indsættes i differentialligningen (ligning 4.3.4). Den hermed opnåede ligning skal gælde i hver enkel orden i ε, og ved at sortere efter orden i ε opnås en differentialligning for hver enkel led i rækkerne for $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\theta)$. Der er intet nulteordensled i rækken, så den første ligning stammer fra førsteordensledene i ε, og er en ligning for $\boldsymbol{v}_1$:

$$\omega_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta} = \mathrm{L}(\mu_0)\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta) \tag{4.3.8}$$

Fra andenordensledene får man:

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta} + \omega_1 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta} &= \\ &\mathrm{L}(\mu_0)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x},\theta) + \mathrm{L}(\mu_1)\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta) + \mathrm{N}(\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta),\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta)) \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Som det ses er ligningen for førsteordensledet direkte det lineariserede problem for den oprindelige differentialligning. Andenordensledet er tilsvarende en førsteordens lineær ligning, men det er en inhomogen ligning, hvor det inhomogene led afhænger af løsningen fra førsteordensledet. Denne struktur fortsætter, hvis man beregner led af højere orden. På denne måde får man det ikke-lineære problem oversat til at løse en række af inhomogene lineære ligninger.

Generelt kræves det, som før sagt, at $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},\theta)$ er 2π periodisk. Dette krav resulterer i krav på ω_n og μ_n. Det er denne type krav som gør det muligt at vise at $\varepsilon \approx \sqrt{\mu - \mu_0}$.

4.3.3 Det lineariserede problem

Ligning 4.3.8 fortæller os at førsteordensledet i rækken for den periodiske løsning skal opfylde det lineariserede problem med $\mu = \mu_0$. Desuden skal førsteordensledet være 2π periodisk i θ. I dette afsnit opskriver vi operationelle generelle krav på førsteordensledet på baggrund af disse to forudsætninger. Det er disse krav vi i næste kapitel anvender, når vi undersøger Hopfbifurkationens betydning for topologien af strømningerne.

Da ligning 4.3.8 er lineær i både tid og sted, er det oplagt at lede efter løsninger som separerer i tid og sted, altså løsninger af formen $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\theta) = f(\theta)\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x})$. Ved at indsætte i ligning 4.3.8 og separere fås

$$\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \gamma f(\theta) \tag{4.3.10}$$

$$\mathrm{L}(\mu_0)\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) = \gamma\omega_0\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) \tag{4.3.11}$$

hvor γ er separationskonstanten.

Den tidslige del har løsningen $f(\theta) = e^{\gamma\theta}$. Det ses endvidere, at $\gamma\omega_0$ skal være en egenværdi for den lineære operator ved $\mu = \mu_0$, og at løsningerne til den stedslige ligning er de tilhørende egenfunktioner.

Da vi kun er interesserede i 2π-periodiske løsninger må de søgte løsninger være linearkombinationer af funktioner på formen

$$e^{i\theta}\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}),\ e^{-i\theta}\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x}) \tag{4.3.12}$$

hvor $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x})$ nu er et komplekst vektorfelt. Det betyder, at for de ønskede løsninger er $\gamma = \pm i$. De interessante egenværdier for den lineære del, $L(\mu_0)$, er $\gamma\omega_0 = \pm i\omega_0$, og da vi ved, at ω_0 er reel[6], er det de rent imaginære egenværdier, som er relevante. Det vil sige, at det netop er de to egenværdier, som følger af antagelsen om, at der er en Hopfbifurkation (se afsnit 4.3.1). Man finder altså at $i\omega_0 = \lambda(\mu_0)$, hvilket vil sige at $\omega_0 = \beta_0$.

Indsættes $\theta \simeq \omega_0 t = \beta_0 t$ fås endelig, at førsteordensapproksimationen til den periodiske løsning nær Hopffbifurkationen har formen:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \simeq \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon(e^{i\beta_0 t}\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t}\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x})) \tag{4.3.13}$$

hvor $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x})$ opfylder ligning

$$\mathrm{L}(\mu_0)\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) = i\beta_0\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) \tag{4.3.14}$$

og hvor $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})$ er den stationære løsning som Hopfbifurkerer.

Vi vil som sagt udnytte disse krav i næste kapitel.

[6] Den er en koeficient i rækken for vinkelfrekvensen, ligning 4.3.7.

5 Hopfbifurkation og topologi

I kapitel 2 og 3 præsenterede vi den topologiske fluidmekanik i to dimensioner, og forklarede, hvordan man i denne ramme bestemmer de strømningstopologier, som ligger i nærheden af en given degenereret strømning. I foregående kapitel beskrev vi, hvordan man for nogle partielle differentialligninger med randbetingelser kan beskrive overgangen fra en stabil stationær løsning til en tiltrækkende periodisk løsning som en Hopfbifurkation.

I dette afsnit vil vi redegøre for, hvordan man kan kombinere disse to typer af information og dermed blive i stand til at udtale sig om dynamikken i forløbet af strømningstopologierne. Vi vil vise, hvordan man kan betragte den periodiske strømning som en bevægelse langs en banekurve gennem udfoldningsparameterrummet, hvor de krav som vi har fundet fra Hopfbifurkationen kan lægge begrænsninger på hvilke kurver, der er mulige. Vi vil også diskutere, hvilken betydning det har, at væsken skal opfylde Navier-Stokes ligning.

5.1 Den konkrete Navier-Stokes ligning

I afsnit 4.3 var udgangspunktet en differentialligning (i et tidsafhængigt vektorfelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$) på følgende form

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mathrm{L}(\mu)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \mathrm{N}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)), \tag{5.1.1}$$

hvor $\mathrm{L}(\mu)$ er en parameterafhængig lineær operator og $\mathrm{N}(\cdot, \cdot)$ er en parameteruafhængig bilineær operator. Det var desuden en antagelse at $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0}$ er den relevante stationære løsning.

Vi ønsker nu at skrive Navier-Stokes ligning om, til en ligning der gælder for en perturbation af et stationært felt (svarende til at vi flytter den stationære løsning til $\mathbf{0}$), og samtidig vil vi vise, at den ligning, vi kommer frem til, er af samme form som ligning 5.1.1.

Udgangspunktet er Navier-Stokes ligning for en inkompressibel væske:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} &= -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{v}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

hvor $\boldsymbol{v}$ nu er et todimensionelt vektorfelt, og hvor p er trykket i væsken normeret med væskens massefylde. Disse to ligninger kan med fordel skrives om, således at man fjerner trykledet. Dette gøres ved at tage rotationen af ligningen, samt benytte en række vektoridentiteter. Resultatet er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\omega &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \omega \\ \omega &= \nabla \times \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

I simple fluidmekaniske problemer antager man normalt, at hastighedsfeltet langt væk fra det interessante område er homogent. Dermed er det ikke umiddelbart noget problem, at antage, at det lokale topologiske problem vi betragter, er indlejret i et lukket domæne. Hastighederne vil så være bestemt, som en given værdi langs den ydre rand og nul ved en evt. væg i systemet.

Ligning 5.1.3 omskrives så den beskriver dynamikken for en perturbation af et stationært felt. Det vil sige, at vi har et stationært felt $\boldsymbol{v}_0(\mathrm{Re})$ (med tilhørende rotation $\omega_0 = \nabla \times \boldsymbol{v}_0$) som opfylder 5.1.3 i den stationære udgave:

$$(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_0 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \omega_0 \tag{5.1.4}$$

Det stationære felt plus en perturbation $\boldsymbol{v}_p$ (med tilhørende rotation ω_p) betragtes.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_p \text{ og} \tag{5.1.5a}$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_p \tag{5.1.5b}$$

Det samlede felt skal nu opfylde den tidsafhængige Navier-Stokes ligning. Det kan også bemærkes, at det skal gælde at $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_p = 0$, da det samlede hastighedsfelt skal være divergensfrit, og $\boldsymbol{v}_0$ per antagelse er det. Endelig skal det samlede felt opfylde randbetingelserne, og da $\boldsymbol{v}_0$ per antagelse opfylder de randbetingelser, der er i den givne situation, vil $\boldsymbol{v}_p$ altid skulle være nul ved randen.

Ved at indsætte i ligning 5.1.3 fås

$$\frac{\partial(\omega_0 + \omega_p)}{\partial t} + ((\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_p) \cdot \nabla)(\omega_0 + \omega_p) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\omega_0 + \omega_p) \tag{5.1.6}$$

hvilket kan skrives ud til

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + \frac{\partial \omega_p}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_0 + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_p + (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_0 + (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_p \\ = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \omega_0 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \omega_p. \end{aligned}$$

De led, hvor der kun indgår ω_0 og $\boldsymbol{v}_0$ svarer præcis til den stationære Navier-Stokes ligning på det stationære felt, og disse går altså ud (jvf. ligning 5.1.4). Vi har dermed følgende ligning som styrer perturbationen:

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_p + (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_0 + (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \omega_p \tag{5.1.7}$$

Det ses, at den styrende ligning for perturbationen svarer til den originale Navier-Stokes ligning, hvor der er tilføjet to nye lineære led, som afhænger af det stationære felt (og dermed af Re). Ligningen kan deles op i en lineær del og en bilineær del. Man finder ved inspektion at den lineære del er

$$\mathrm{L}(\mathrm{Re})(\omega_p) \quad = \quad -(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_p - (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_0 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega_p, \tag{5.1.8}$$

og den ikke-lineære del er

$$\mathrm{N}(\omega_p, \omega_p) \quad = \quad -(\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla)\omega_p. \tag{5.1.9}$$

Bemærk at dette er et dynamisk system i rotationen ω_p, men selve hastighedsfeltet $\boldsymbol{v}_p$ indgår også. Hvis man antager, at man er på et lukket domæne med passende randbetingelser, kan man på en entydig og lineær måde finde $\boldsymbol{v}_p$ ud fra ω_p, så dermed udgør dette ikke noget problem[1].

Det ses altså som før påstået, at Navier-Stokes ligning er af den i afsnit 4.3 behandlede form (se ligning 5.1.1). Dette betyder, at vi kan få information fra Poincaré-Lindstedt rækkeudviklingen.

Vi antager nu, at der er en Hopfbifurkation ved Reynoldstal Re_0, samt at vi har en situation, hvor Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling kan benyttes. Under disse antagelser, og med Navier-Stokes ligning opskrevet som i ligning 5.1.7 giver resultaterne fra sidste kapitel følgende førsteordensapproksimation til den periodiske løsning af Navier-Stokes ligningen umiddelbart efter Hopfbifurkationen:

$$\omega(\boldsymbol{x}, t) \simeq \omega_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon(e^{i\beta_0 t}\omega_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t}\omega_1^*(\boldsymbol{x})), \tag{5.1.10}$$

hvor ω_0 er det stationære felt som Hopfbifurkerer, og hvor $\omega_1 = \omega_1' + i\omega_1''$ er et komplekst felt.

ω_1 skal være egenfunktion for den lineære operator fra Navier-Stokes ligningen for perturbationen, taget i Reynoldstal Re_0:

$$\begin{aligned} i\beta_0\omega_1 &= \mathrm{L}(\mathrm{Re}_0)\omega_1 \\ &= -(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_1 - (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\omega_0 + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\nabla^2\omega_1, \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

[1] Da væsken er todimensionel og inkompressibel, kan man som flere gange udnyttet beskrive strømning ved en strømlinjefunktion ψ (se sætning 2.1.2), og det ses let at der gælder følgende sammenhæng mellem strømlinjefunktionen og rotationsfeltet

$$\nabla^2\psi = \omega.$$

Hvis man ønsker at finde strømlinjefunktionen ud fra rotationsfeltet skal man altså løse en Poisson ligning. Dette er muligt, hvis vi begrænser os til et lukket domæne med randbetingelser for enten funktionsværdierne eller de stedslige afledte [Arfken & Weber, 1995, s 463]. Da de førsteordensafledte af ψ netop giver hastighederne, vil disse per antagelse være kendte.

Dermed findes der en operator som sender rotationfelt til strømlinjefunktion, og ud fra strømlinjefunktionen kan man let finde hastighedsfeltet.

En differentialligning af denne type kan løses ved at bruge Greens funktioner [Arfken & Weber, 1995, afsnit 8.7], løsningen findes da ved en integration. Dermed ses det, at der er en lineær sammenhæng mellem rotationsfelt og hastighedsfelt (da sammenhængen mellem strømlinjefunktion og hastighedsfelt oplagt er lineær).

hvor $i\beta_0$ er egenværdien. Desuden skal ω_0 opfylde den stationære Navier-Stokes ligning:

$$(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_0 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega_0 \tag{5.1.12}$$

I resten af dette kapitel vil vi undersøge, hvilke krav disse ligninger kan lægge på strømningstopologierne.

5.2 Dynamik for strømlinjefunktionen efter Hopf-bifurkation

For at benytte resultaterne fra Poincaré-Lindstedt rækkeudviklingen i den to-dimensionelle topologiske fluidmekanik skal de formuleres i termer af Taylor-koefficienterne for strømlinjefunktionen.

Som vi før har nævnt, ses det let, at rotationsfeltet er givet ved Laplaceoperatoren taget på strømlinjefunktionen

$$\omega(\boldsymbol{x}, t) = \nabla^2\psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{5.2.1}$$

Fra Poincaré-Lindstedt rækkeudviklingen har vi ω givet som en række

$$\omega(\boldsymbol{x}, t) = \omega_0(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon\omega_1(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon^2\omega_2(\boldsymbol{x}, t) + \ldots \tag{5.2.2}$$

På et givent domæne med kendte randbetingelser definerer $\omega_i(\boldsymbol{x}, t)$ en strømlinjefunktion, ψ_i, som opfylder

$$\omega_i(\boldsymbol{x}, t) = \nabla^2\psi_i(\boldsymbol{x}, t). \tag{5.2.3}$$

Vi antager at rækken for rotationen (ligning 5.2.2) konvergerer passende, således at

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \psi_0(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon\psi_1(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon^2\psi_2(\boldsymbol{x}, t) + \ldots \tag{5.2.4}$$

hvor $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ på venstresiden opfylder ligning 5.2.1.

$\psi_1(x, t)$ er per konstruktion periodisk i tiden, med perioden ${}^{2\pi}/_{\beta_0}$, og kan derfor opskrives som:

$$\psi_1(\boldsymbol{x}, t) = e^{i\beta_0 t}\psi_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t}\psi_1^*(\boldsymbol{x}), \tag{5.2.5}$$

hvor $\psi_1(\boldsymbol{x})$ er tidsuafhængig og kompleks. Den består altså af en real- og en imaginærdel; $\psi_1 = \psi_1' + i\psi_1''$.

Da Laplaceoperatoren er lineær og kun virker på stedsafhængigheden fås umiddelbart

$$\nabla^2\psi_1(\boldsymbol{x}) = \omega_1(\boldsymbol{x}) \text{ og} \tag{5.2.6a}$$

$$\nabla^2\psi_1'(\boldsymbol{x}) = \omega_1'(\boldsymbol{x}), \quad \nabla^2\psi_1''(\boldsymbol{x}) = \omega_1''(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.6b}$$

hvor $\omega_1(\boldsymbol{x})$ er det tidsuafhængige komplekse rotationsfelt som optræder i ligning 5.1.10.

Ialt fås en førsteordensapproksimation til den samlede strømlinjefunktion:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \simeq \psi_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\left(e^{i\beta_0 t}\psi_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t}\psi_1^*(\boldsymbol{x})\right). \tag{5.2.7}$$

Under den gennemgående antagelse om at strømlinjefunktionerne er glatte nok kan disse rækkeudvikles som

$$\psi = \sum_{m+n=1}^{k} \psi_{n,m} x^n y^m + O(k+1), \tag{5.2.8a}$$

$$\psi_0 = \sum_{m+n=1}^{k} a_{n,m} x^n y^m + O(k+1), \tag{5.2.8b}$$

$$\psi_1 = \sum_{m+n=1}^{k} b_{n,m} x^n y^m + O(k+1). \tag{5.2.8c}$$

Ved at benytte ligning 5.2.7 ses endelig at

$$\psi_{n,m} \simeq a_{n,m} + \varepsilon(e^{i\beta_0 t} b_{n,m} + e^{-i\beta_0 t} b_{n,m}^*) \tag{5.2.9}$$

Vi har nu en førsteordensapproksimation til den samlede periodiske strømlinjefunktion. $a_{n,m}$'erne bestemmes af den stationære strømning ψ_0 som skifter stabilitet ved Hopfbifurkationen. Dette gøres dels gennem konkret viden om hvilken strømningstopologi, der er tale om, og dels gennem kravet om, at denne stationære strømning skal opfylde den stationære Navier-Stokes ligning (se næste afsnit). Fra de generelle Hopf-krav (se afsnit 5.4) fås betingelser på $b_{n,m}$'erne.

5.3 Krav direkte fra Navier-Stokes ligning

Navier-Stokes ligning kan i nogle tilfælde lægge begrænsninger på hvilke strømninger, der er fysisk mulige. Dette er behandlet i detalje i Hartnack [1999b, kapitel 3.8]. Vi nøjes med at behandle kravene fra den stationære Navier-Stokes ligning, da disse har direkte betydning for vores arbejde.

Strømlinjefunktionen for en stationær strømning rækkeudvikles (som i ligning 5.2.8b). Ved at indsætte de fra strømlinjefunktionen fundne hastigheds- og rotationsfelter i den stationære Navier-Stokes ligning

$$0 = -(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\omega_0 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega_0 \tag{5.3.1}$$

og samle led af samme orden i x og y, finder man for de første led følgende generelle ligninger, som skal være opfyldt samtidig:

$x^0 y^0$:

$$a_{0,1}\left(-6\,a_{3,0} - 2\,a_{1,2}\right) - a_{1,0}\left(-2\,a_{2,1} - 6\,a_{0,3}\right) - \frac{-24\,a_{4,0} - 8\,a_{2,2} - 24\,a_{0,4}}{\mathrm{Re}} = 0 \tag{5.3.2a}$$

x^1y^0 :

$$a_{1,1}\left(-6\,a_{3,0}-2\,a_{1,2}\right)+a_{0,1}\left(-24\,a_{4,0}-4\,a_{2,2}\right)-2a_{2,0}\left(-2\,a_{2,1}-6\,a_{0,3}\right)$$
$$-\,a_{1,0}\left(-6\,a_{3,1}-6\,a_{1,3}\right)-\frac{-120\,a_{5,0}-24\,a_{3,2}-24\,a_{1,4}}{\mathrm{Re}}=0 \quad (5.3.2b)$$

x^0y^1 :

$$-\,a_{0,2}\left(-6\,a_{3,0}-2\,a_{1,2}\right)+a_{0,1}\left(-6\,a_{3,1}-6\,a_{1,3}\right)-a_{1,1}\left(-2\,a_{2,1}-6\,a_{0,3}\right)$$
$$-\,a_{1,0}\left(-4\,a_{2,2}-24\,a_{0,4}\right)-\frac{-24\,a_{4,1}-24\,a_{2,3}-120\,a_{0,5}}{\mathrm{Re}}=0. \quad (5.3.2c)$$

Generelt kan man vise, at hvis man ser på de ligninger, som hører til den k'te orden i x og y, består de af en lineær kombination af $a_{i,j}$ led med $i+j=k+4$ og en ikke-lineær kombination af $a_{l,m}$ led med $l+m<k+4$. Man kan altså benytte kravene ved at starte med den laveste orden og så arbejde sig op gennem ligningerne. Ligningssystemerne er underbestemte, så det er altså ikke entydige krav som findes [Hartnack, 1999b, s. 93]. I det konkrete tilfælde, hvor den stationære strømning er degenereret, og der er krav fra givne randbetingelser (f.eks. eksistensen af en væg eller symmetri), vil en del af $a_{i,j}$'erne være 0. Dette har stor betydning for det konkrete ligningssystem, hvilket vi vil udnytte i forbindelse med behandlingen af vores case i kapitel 7. Da det kun er Taylorkoefficienter op til en given orden, som har betydning for eksistensen, og udfoldningen, af en degenereret strømning, vil det være nok at undersøge et endeligt antal af disse ligninger.

5.4 Krav fra Hopfbifurkationen

Vi er nu nået til at sammenkoble kravene fra Hopfbifurkationen med topologien af strømningen og de mulige forløb af topologier. I afsnit 5.1 nåede vi frem til følgende førsteordensapproksimation

$$\omega(\boldsymbol{x},t)\simeq\omega_0(\boldsymbol{x})+\varepsilon(e^{i\beta_0 t}\omega_1(\boldsymbol{x})+e^{-i\beta_0 t}\omega_1^*(\boldsymbol{x}))$$

hvor ω_0 er rotationsfeltet for den stationære strømning, og ω_1 er et komplekst rotationsfelt, som skal opfylde ligning 5.1.11. Det blev videre vist, at disse to felter kan beskrives ved en reel strømlinjefunktion ψ_0 og en kompleks strømlinjefunktion ψ_1.

Ud fra de to strømlinjefunktioner ψ_0 og ψ_1 kan man finde de ønskede hastigheds- og rotationsfelter. Ved at rækkeudvikle de to strømlinjefunktioner som det er gjort i ligning 5.2.8 og indsætte de på denne baggrund fundne rækker for rotations- og hastighedsfelter i ligning 5.1.11

$$i\beta_0\omega_1 \quad = \quad -(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\omega_1-(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\omega_0+\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\nabla^2\omega_1, \qquad (5.4.1)$$

fås krav på de indgående koefficienter. Koefficienterne i rækken for ψ_0 er bestemt af den stationære strømning, og disse er altså i denne sammenhæng konstanter. Man skal naturligvis stadig tage højde for de krav, der kan være på disse koefficienter fra den stationære Navier-Stokes ligning (se forrige afsnit).

Ved at sortere efter orden i x og y får man et sæt af ligninger i $b_{i,j}$'erne som skal være opfyldt samtidig. Det betyder altså, at det *er* muligt at få krav på koefficienterne til den tidsafhængige førsteordensperturbation ud fra eksistensen af en Hopfbifurkation.

Hvis man bruge ligninger til n'te orden, får man generelt $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)$ ligninger og $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 4 + 1)$ ubekendte, altså et underbestemt system. Ligesom det var tilfældet med kravene fra den stationære Navier-Stokes ligning, vil der normalt være en del af $a_{i,j}$'erne og nogle af $b_{i,j}$'erne, som er nul, og dermed bliver ligningssystemet simplere.

Man får følgende ligning fra nulteordensledet

$$\begin{aligned} i\,(-2\,b_{0,2} - 2\,b_{2,0})\,\beta_0 - \frac{-24\,b_{0,4} - 8\,b_{2,2} - 24\,b_{4,0}}{\mathrm{Re}_0} + (6\,b_{0,3} + 2\,b_{2,1})\,a_{1,0} \\ - 6\,b_{0,1}a_{3,0} + (-2\,b_{1,2} - 6\,b_{3,0})\,a_{0,1} + 2\,b_{1,0}a_{2,1} - 2\,a_{1,2}b_{0,1} + 6\,a_{0,3}b_{1,0} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.2a}$$

og følgende to ligninger fra førsteordensledene

$$\begin{aligned} i\,(-2\,b_{1,2} - 6\,b_{3,0})\,\beta_0 - \frac{-24\,b_{1,4} - 24\,b_{3,2} - 120\,b_{5,0}}{\mathrm{Re}_0} + (6\,b_{1,3} + 6\,b_{3,1})\,a_{1,0} \\ + (12\,b_{0,3} + 4\,b_{2,1})\,a_{2,0} - 6\,b_{1,1}a_{3,0} - 24\,b_{0,1}a_{4,0} + (-4\,b_{2,2} - 24\,b_{4,0})\,a_{0,1} \\ + (-2\,b_{1,2} - 6\,b_{3,0})\,a_{1,1} + 4\,b_{2,0}a_{2,1} + 6\,b_{1,0}a_{3,1} - 4\,a_{2,2}b_{0,1} + 12\,a_{0,3}b_{2,0} \\ + 6\,a_{1,3}b_{1,0} - 2\,a_{1,2}b_{1,1} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.2b}$$

og

$$\begin{aligned} i\,(-6\,b_{0,3} - 2\,b_{2,1})\,\beta_0 - \frac{-120\,b_{0,5} - 24\,b_{2,3} - 24\,b_{4,1}}{\mathrm{Re}_0} + (24\,b_{0,4} + 4\,b_{2,2})\,a_{1,0} \\ - 12\,b_{0,2}a_{3,0} + (-6\,b_{1,3} - 6\,b_{3,1})\,a_{0,1} + (6\,b_{0,3} + 2\,b_{2,1})\,a_{1,1} + 2\,b_{1,1}a_{2,1} - 6\,b_{0,1}a_{3,1} \\ + (-4\,b_{1,2} - 12\,b_{3,0})\,a_{0,2} - 4\,a_{1,2}b_{0,2} + 4\,b_{1,0}a_{2,2} + 6\,a_{0,3}b_{1,1} \\ - 6\,a_{1,3}b_{0,1} + 24\,a_{0,4}b_{1,0} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.2c}$$

Det er selvfølgelig muligt at opskrive ligningerne generelt ved at holde styr på, hvad der sker med et generisk $x^i y^j$-led ved indsættelse i ligning 5.4.1.

Det ses at strukturen er, at der i ligningerne fra n'te orden i x og y indgår en lineær kombination af $b_{i,j}$ led med $i + j = n + 4$, og en ikke-lineær kombination af led $a_{l,m}$ og $b_{i,j}$ med $l + m \leq n + 3$ og $i + j \leq n + 3$. Det er altså muligt at bearbejde ligningerne nedefra, indtil man når til led af så høj orden, at de ikke har nogen betydning i udfoldninge.

I næste afsnit vil vi beskrive, hvilke konsekvenser disse krav kan have på den mulige dynamik som findes lige efter Hopfbifurkationen.

5.5 Periodiske perturbationer

I kapitel 3 beskrev vi, hvordan man med udgangspunkt i et degenereret kritisk punkt kan lave en udfoldning som indfanger alle mulige strømningstopologier, der kan fremkomme ved en lille perturbation af den degenererede strømning. Vi vil nu gøre rede for, hvordan man kan betragte den periodiske strømning efter en Hopfbifurkation i denne ramme.

Udgangspunktet er det samme som i de sidste afsnit. Det vil sige, at vi før Hopfbifurkationen har en stabil stationær strømning som er beskrevet ved en strømlinjefunktion ψ_0 (for at give noget af interesse skal den stationære strømning være degenereret, så det vil vi i det følgende antage at den er). Efter Hopfbifurkationen har vi en stabil periodisk strømning som til første orden er beskrevet ved en tidsafhængig strømlinjefunktion $\psi(t)$. $\psi(t)$ kan skrives som (ligning 5.2.7)

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \simeq \psi_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \left(e^{i\beta_0 t} \psi_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t} \psi_1^*(\boldsymbol{x}) \right), \tag{5.5.1}$$

hvor ψ_1 er en kompleks strømlinjefunktion, ψ, ψ_0 og ψ_1 rækkeudvikles som i ligning 5.2.8. Fra ligning 5.2.9, har vi endvidere følgende sammenhæng mellem koefficienterne i de tre rækker:

$$\psi_{n,m} \simeq a_{n,m} + \varepsilon (e^{i\beta_0 t} b_{n,m} + e^{-i\beta_0 t} b_{n,m}^*) \tag{5.5.2}$$

For en given degenereret strømning ψ_0, skal visse led i Taylorrækken for ψ_0 være nul, og visse led skal være forskellige fra nul. For de led der er forskellige fra nul har den eksakte værdi ikke betydning for typen af den degenererede strømning. Ligeledes vil led fra og med en given orden være uden betydning (se kapitel 3).

Med udgangspunkt i en degenereret strømning får vi altså, at $a_{n,m} = 0$ for visse n, m, og at $a_{n,m} \neq 0$ for andre n, m.

Samtidig fandt vi i afsnit 5.3 betingelser, som skal gælde for $a_{i,j}$'erne og i afsnit 5.4 betingelser på $b_{i,j}$'erne.

I forbindelse med udfoldningen af en degenereret strømning beskrev vi i afsnit 3.3, hvordan man indfører et antal små udfoldningsparametre i Taylorrækken for strømlinjefunktionen (disse betegnes i afsnittet med $\varepsilon_{i,j}$), i stedet for de koefficienter som er nul for den degenererede strømning. Ved at ændre på disse koefficienter finder man alle strømninger, som ligger i nærheden af den degenererede strømning.

Hvis man betragter ligning 5.5.2, ses det at den tidsafhængige strømlinjefunktion har samme form som en udfoldning af den degenererede strømning. For de $a_{i,j}$ som er nul, virker det tidsafhængige led som en tidsafhængig udfoldningsparameter. For de $a_{i,j}$ som ikke er nul, vil den tidsafhængige del af $\psi_{i,j}$ ikke have nogen betydning så længe denne er tilpas lille. Det vil sige, så længe ε er tilpas lille.

Det betyder altså, at den periodiske strømning som funktion af tiden gennemløber en del af de strømningstopologier, som er i nærheden af den degenererede strømning. Man kan således betragte den tidslige strømning som en banekurve i udfoldningsparameterrummet. Måden bevægelsen i udfoldningsparameterrummet foregår på er bestem af $b_{i,j}$ koefficienterne. Det betyder at de krav, der er på $b_{i,j}$, kan lægge bånd på, hvordan man bevæger sig rundt mellem de forskellige strømningstopologier. Det ses af ligning 5.5.2 at $\psi_{i,j}$'erne ændrer sig som $\sin(\beta t + \varphi)$ (hvor φ er en fase for hver parameter). Hvis man havde regnet til højere orden i Poincaré-Lindstedt rækken, ville der komme led med højere frekvenser, men for små ε vil førsteordensledet være dominerende.

Når man konkret analyserer udfoldningen, er det normalt på en transformeret strømlinjefunktion (den såkaldte normalform), og man finde et antal transformerede udfoldningsparametre (normalt betegnet $c_{i,j}$). Disse er en kombination af koefficienter fra den oprindelige Taylorrække for strømlinjefunktionen. Det vil altså i dette afsnits notation sige, at de er en kombination af $\psi_{m,n}$'er.

Den tidsafhængige strømlinjefunktion, kan naturligvis også normalformstransformeres, og det giver tidsafhængigheden af de transformerede udfoldningsparametre.

I rummet af de transformerede udfoldningsparametre ligger den degenererede strømning også i origo. De transformerede parametre, $c_{i,j}$, vil dermed antage værdien nul, hvis man sætter alle de oprindelige udfoldningsparametre til nul. Dette betyder, at der i en transformeret udfoldningsparameter i alle led altid indgår en faktor som er en af de oprindelige udfoldnings parametre. Når man benytter samme transformation på den tidsafhængige strømlinjefunktion får man, at der i alle led af de transformerede tidsafhængige udfoldningsparametre indgår en faktor $\varepsilon \sin(\beta_0 t + \varphi)$ (husk at de oprindelige udfoldningsparametre præcis svare til de Taylorkoefficienter hvor $a_{i,j} = 0$). Da vi kun regner til første orden i ε vil tidsafhængigheden af disse nye udfoldningsparametre også bliver som $\sin(\beta t + \varphi)$.

Førsteordensapproksimationen giver altså et udtryk, hvor de tidsafhængige udfoldningsparametre svinger harmonisk med frekvensen β_0 omkring origo i udfoldningsparameterrummet.

Hvis man regnede til anden orden i ε, ville der kunne opstå nulteordensled i tidsafhængigheden, svarende til at det centrum de tidsafhængigheden udfoldningsparametre svinger omkring bliver flyttet. Ligedes ville der kunne opstå led der svingede med en højere frekvens. Disse led ville naturligvis være af anden orden i ε, og er altså andenordenseffekter. Det betyder, at lige efter Hopfbifurkationen vil amplituden af svingningen med frekensen β_0 vokse hurtigere end de andre led, og dermed være dominerende.

Når man har fastlagt udfoldningen af en degenereret strømning og tegnet udfoldningsdiagrammet, er det altså let at forestille sig hvilke tidslige sekvenser af strømlinjetopologier, der kan findes lige efter Hopfbifurkationen. De forskellige sekvenser vil indeholde de topologier som passeres af ellipseformede banekurver, med centrum i origo, gennem diagrammet. Det vigtigste for hvilke domæner i udfoldningsparameterrummet, der passeres, er hvilket plan kurven ligger i. Her vil de krav, der kan være på $b_{i,j}$ ledene fra de generelle Hopf-krav, svare til begrænsninger på, hvilke ellipsekurver der er mulige.

For et kritisk punkt af kodimension to, er der almindeligvis kun en mulig sekvens af topologier i strømningen lige efter en Hopfbifurkation. Dette skyldes, at der kun er et muligt plan, den ellipseformede kurve gennem det todimensionelle transformerede udfoldningsparameterrum kan ligge i. Da alle domæner i udfoldningsdiagrammet skal eksistere vilkårlig tæt på origo, vil alle domæner, og dermed alle topologier blive passeret.

Untagelsen for dette, er det tilfælde hvor elipsen er "klappet sammen" til en linje. I almindelighed vil dette være usandsynligt, fordi det kræver at svingningerne i de to parameterværdier var præcis i fase. Det er dog muligt, at denne situation kan være en konsekvens af Hopf-kravene, og dermed nødvendigvis vil opstå.

5.6 Opsamling på generelle resultater

Hermed afsluttes den generelle undersøgelse af konsekvenserne af en Hopfbifurkation, og vi vil her kort repetere resultaterne.

Det er blevet undesøgt hvilken type viden man kan få om strømningstopologien under de antagelser, at der eksisterer en Hopfbifurkation, samt at man kan rækkeudvikle det tidsafhængige rotationsfelt for strømningen efter Hopfbifurkationen. Gennem nogle omskrivninger blev denne række omsat til en række i den tidsafhængige strømlinjefunktion.

Ud fra denne række har vi vist, at man kan tolke tidsudviklingen af strømningens topologi efter bifurkationen som en periodisk ellipseformet kurve i udfoldningsparameterrummet.

Hvis den stationære strømning er en kodimension to degenereret strømning betyder det, at der i almindelighed kun er én mulig dynamik lige efter Hopfbifurkationen.

Fra de generelle krav, der kan opstilles på baggrund af eksistensen af Hopfbifurkationen, kan man få krav på hvilke ellipseformede kurver der kan forekomme, og altså dermed på hvilke dynamikker der kan findes efter bifurkationen.

Desuden blev det diskuteret, hvilken betydning det kan have, at den stationære strømning skal opfylde Navier-Stokes ligning.

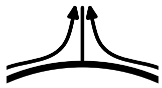
6 Topologien af casen

Vi vil nu vende tilbage til den case, som har virket som inspiration for dette projekt, og i næste kapitel vil vi anvende resultaterne fra sidste kapitel på netop denne case. For at komme frem til at kunne analysere casen, skal vi imidlertid først have en topologisk beskrivelse af strømningen før Hopfbifurkation og en udfoldning af denne. I dette kapitel laver vi derfor en sådan topologisk beskrivelse.

Som beskrevet i indledningen (se afsnit 1) er der først en topologisk bifurkation fra krybende strømning til en strømning med en dobbeltboble topologi. Ved denne topologiske bifurkation må det kritiske punkt ved væggen være degenereret, da det er en overgang mellem to forskellige strukturelt stabile strømninger.

Vi tager udgangspunkt i den mindst degenererede symmetriske strømning med et degenereret punkt ved væggen, denne strømning vil vi benævne *den organiserende strømning*. Denne strømning udfolder faktisk til en dobbeltboble topologi, og giver os dermed også den mindst degenererede strømning med en dobbeltboble. Den mindst degenererede strømning med en given topologi, er den strømning som skal opfylde færrest krav, og dermed den simpleste. Vi benævner derfor den mindst degenererede dobbeltboble *den simple dobbeltboble*.

Der kan principielt findes andre strømninger med en dobbeltboble topologi, som er degenererede til højere orden. Derfor kan vi ikke vide om det er den simple dobbeltboble strømning, der findes i en virkelig væske lige inden bifurkationen til periodisk strømning. Den giver imidlertid den simpleste beskrivelse, og derfor er det helt oplagte at undersøge denne model for strømningen.



Figur 6.1 Skitse af den lokale strømning bag en cylinder, ved meget små Reynoldstal.

På figur 6.1 ses en skitse af den strømning som man kan se bag en cylinder før den første topologiske bifurkation. Det ses at der er et kritisk punkt på væggen, og en seperatrice som er vinkelret på væggen.

6.1 Karakterisering af den organiserende strømning

Det antages, som normalt, at vi er i stand til at beskrive strømningen ved en strømlinjefunktion $\psi(x,y)$ som kan rækkeudvikles til vilkårlig høj orden omkring $(x,y) = (0,0)$, (hvor koordinatsystemet placeres så $(x,y) = (0,0)$ er i det kritiske punkt på væggen):

$$\psi = \sum_{i+j=1}^{k} \psi_{i,j} x^i y^j + O(k+1). \tag{6.1.1}$$

Da der er en væg i væsken, skal den randbetingels som blev beskrevet i afsnit 3.1.1 benyttes. Det betyder at

$$\psi_{i,0} = 0 \text{ og } \psi_{i,1} = 0 \text{ for } i = 0,1,2,..$$

Strømningen er symmetrisk om y-aksen, hvilket også giver anlening til betingelser på ψ's Taylorrække. Hvis man betragter det vektorfelt som ψ generere $(u,v) = (\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x})$ ses det at for at den samlede strømning bliver symmetrisk omkring y-aksen skal det gælde at $u(x,y) = -u(-x,y)$ og $v(x,y) = v(-x,y)$. Da u er ulige i x, ses det, at der ikke kan optræde led i ψ's Taylorrække som er lige i x. Dermed må det gælde at

$$\psi_{2i,j} = 0 \text{ for } i = 0,1,2,.. \text{ og } j = 0,1,2,..$$

det ses at kravet om v's symmetri i x hermed også er opfyldt. Det ses desuden at kravet om symmetri giver et kritisk punkt på væggen i $x = 0$, da man specielt får at $\psi_{0,2} = 0$.

I en virkelig fysisk strømning vil der aldrig være perfekt symmetri, og dermed vil kravet om symmetri ikke skulle være opfyldt til vilkårlig høj orden. I praktisk antager vi, at der er symmetri til femte orden, hvilket viser sig at være tilstrækkeligt til at indfange den dynamik vi ønsker at beskrive.

Det antages nu, at dette kritiske punkt er degenereret. Det vil ifølge afsnit 3.1.1 sige at:

$$\psi_{1,2} = 0 \tag{6.1.2}$$

Det ses at dette kritiske punkt automatiks bliver et ikke-simpelt degenereret kritiske punkt (se igen afsnit 3.1.1), fordi $\psi_{0,3} = 0$ følger af symmetrien.

Dette giver altså alt i alt følgende strømlinjefunktion

$$\psi = \psi_{1,3} x y^3 + \psi_{3,2} x^3 y^2 + \psi_{1,4} x y^4 + O(6). \tag{6.1.3}$$

Senere hen refererer vi til strømningen defineret på denne måde, som den organiserende strømning.

Et ikke-simpelt degenereret kritisk punkt ved en væg er undersøgt i Hartnack [1999b], for de tilfælde hvor $\psi_{2,2} \neq 0$. Dette er imidlertid ikke tilfældet for det kritiske punkt vi arbejder med.

Det kritiske punkt vi arbejder med er tidligere behandlet i Petersen [2002a] og i Bakker [1991]. I Petersen [2002a] fokuseres der på hvilken betydning det har hvis cylinderen roterer[1] og i Bakker [1991] antages det at strømningen skal opfylde den stationære Navier-Stokes ligning. Da vi analyserer hvilke strømningstopologier, der findes i periodiske løsninger til Navier-Stokes ligning, er det oplagt ikke et krav, at den stationære Navier-Stokes ligning skal være opfyldt, derfor foretager vi en generel analyse af dette kritiske punkt.

6.2 Normalform for den organiserende strømning

Som beskrevet i kapitel 3 kan man ofte foretage en koordinattransformation, der bringer strømlinjefunktionen på en simpel form, den såkaldte normalform.

Som tidligere beskrevet ønsker vi at benytte en transformation som bevarer strømlinjefunktionen. For at sikre dette benyttes en kanonisk transformation (se afsnit 3.2.1), altså en transformation som er defineret ud fra en genererende funktion $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ hvor $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0$.

I afsnit 3.2.2 blev følgende generelle genererende funktion defineret (ligning 3.2.9)

$$S = \xi\, y + s_{0,3} y^3 + s_{1,2} \xi\, y^2 + s_{2,1} \xi^2 y + s_{3,0} \xi^3$$

og ud fra denne blev en generel kanonisk transformation fundet (ligning 3.2.11)

$$\begin{aligned} y &= \eta - s_{1,2}\eta^2 - 2\, s_{2,1}\xi\,\eta - 3\, s_{3,0}\xi^2 + O(3), \\ x &= \xi + 3\, s_{0,3}\eta^2 + 2\, s_{1,2}\xi\,\eta + s_{2,1}\xi^2 + O(3). \end{aligned}$$

Det ses, at det er nok at finde transformationen til anden orden, hvis vi kun ønsker at bestemme normalformen til femte orden, da der ikke er nogle konstanled i transformationen, og alle led i strømlinjefunktionen er af fjerde eller højere orden.

Da vi ønsker, at væggen forbliver ved ξ aksen i det transformerede system kræver vi, at $\eta = 0$ medfører $y = 0$, hvilket giver at $s_{3,0} = 0$. Det blev før fundet at symmetrien svarer til at ψ er ulige i x. For at lette tolkningen af vores normalform ønsker vi at bevare denne symmetri[2]. Vi ønsker dermed at den transformerede strømlinjefunktion bliver ulige i ξ. Dette kan opnås ved at sætte $s_{0,3} = 0$ og $s_{2,1} = 0$, og det giver dermed følgende transformation

[1] I den lokale teori oversætter den roterende cylinder til at væggen langs x-aksen bevæger sig med en hastighed. No-slip randbetingelsen betyder så at væsken ved væggen får en konstant hastighed i x-retningen, mens no-flux randbetingelsen er uændret.

[2] Bemærk at en symmetrisk strømning godt kan være ækvivalent med en strømning som ikke er symmetrisk.

$$\begin{aligned} y &= \eta - s_{1,2}\eta^2 + O(3), && \text{(6.2.1a)} \\ x &= \xi + 2\, s_{1,2}\xi\, \eta + O(3). && \text{(6.2.1b)} \end{aligned}$$

Ved at indsætte transformationen i strømlinjefunktionen (ligning 6.1.3) fås

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_{1,3}\xi\eta^3 + \psi_{3,2}\xi^3\eta^2 + (-\psi_{1,3}s_{1,2} + \psi_{1,4})\,\xi\eta^4 + O(6). \tag{6.2.2}$$

Hvis man indfører ikke-degenererethedskravet at $\psi_{1,3} \neq 0$, kan man ved at vælge

$$s_{1,2} = \frac{\psi_{1,4}}{\psi_{1,3}} \tag{6.2.3}$$

reducere strømlinjefunktionen til

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_{1,3}\xi\eta^3 + \psi_{3,2}\xi^3\eta^2 + O(6). \tag{6.2.4}$$

Ikke-degenererethedskravet om at $\psi_{1,3} \neq 0$ er et krav som gør, at det er muligt at konstruere transformationen. Det er derfor et krav analogt til kravet om $\psi_{0,3} \neq 0$ for simpelt degenererede punkter (jvf. afsnit 3.2.2). Hvis $\psi_{3,2} = 0$ vil det være nødvendigt at medtage flere led for at bestemme topologien af strømningen. Det vil sige, at strømningen ville være degenereret af højere orden. Den simpleste degenererede symmetriske strømning er den med $\psi_{3,2} \neq 0$, og vi antager derfor, at dette krav er opfyldt. Det viser sig, at udfoldningen af denne degenererede strømning indfanger de topologier, som vi ved findes i den fysiske strømning.

Med antagelsen om at $\psi_{3,2} \neq 0$ kan udtrykket simplificeres endnu mere ved at dividere strømlinjefunktionen med $\psi_{3,2}$ (svarer til at skalere tiden med $\psi_{3,2}$), man får da

$$\psi(\xi, \eta) = \widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta^3 + \xi^3\eta^2 + O(6), \tag{6.2.5}$$

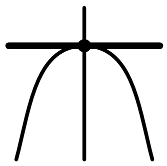
hvor $\widetilde{\psi}_{1,3} = \frac{\psi_{1,3}}{\psi_{3,2}}$. Dette er vores normalform for den organiserende strømning.

Vi analyserer strømningen ved det kritiske punkt ud fra den trunkerede normalform. Som det første bemærkes at en spejling i ξ-aksen: $\eta \to -\eta$ har samme effekt som et fortegns skift på $\widetilde{\psi}_{1,3}$. Derfor er det ikke nødvendigt, at analysere begge fortegn af $\widetilde{\psi}_{1,3}$. Vi vælger at analysere tilfældet $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$. I dette tilfælde er det strømningen over ξ-aksen som giver topologier svarende til dem, der findes i strømningen bag en cylinder. Strømningen under ξ-aksen er fysisk set en helt anden strømning og er udelukkende medtaget for fuldstændighedens skyld.

Som beskrevet i sætning 2.2.4 svarer strømlinjer til ækvikurver for strømlinjefunktionen. Da vi ønsker at finde de strømlinjer som udgår fra det kritiske punkt, og da $\psi(0, 0) = 0$, svarer det til at løse:

$$0 = \widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta^3 + \xi^3\eta^2. \tag{6.2.6}$$

Det ses at der er tre løsninger $\eta = 0$, $\xi = 0$ og $\eta = -\frac{\xi^2}{\widetilde{\psi}_{1,3}}$. Det skal bemærkes at $\eta = 0$ løsningen ikke er en strømlinje ude i væsken, og at de to andre løsninger beskriver en seperatrice i strømningen over ξ-aksen, og tre seperatricer i strømningen under ξ aksen. På figur 6.2 ses en skitse af strømningen ved det degenererede punkt.



Figur 6.2 Skitse af strømningen ved det degenererede punkt for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$.

6.3 Symmetribevarende udfoldning

Da vi ved, at den topologiske bifurkation, som skaber dobbeltboblen, bevarer symmetrien, er det interessant at se på en udfoldning af den organiserende strømning, hvor man beholder antagelsen om symmetri[3]. I appediks B findes et Maple ark, som viser hvordan vi konkret har arbejdet med udfoldningen.

Hvis vi forlanger, at der stadig er symmetri, er der kun en mulig udfoldningsparameter og det er $\psi_{1,2}$. Denne parameter bestemmer om det kritisk punkt er degenereret eller ej.

Vi indfører derfor den lille udfoldningsparameter $\varepsilon_{1,2}$ og sætter $\psi_{1,2} = \varepsilon_{1,2}$. Strømlinjefunktionen bliver dermed

$$\psi(x, y) = \varepsilon_{1,2}xy^2 + \psi_{1,3}xy^3 + \psi_{3,2}x^3y^2 + \psi_{1,4}xy^4 + O(6). \tag{6.3.1}$$

Gennem en parameterafhængig transformation, og skaleringer svarende til de før foretagne kommer man frem til følgende normalform for enparameterudfoldningen

$$\psi(\xi, \eta) = c_{1,2}\xi\eta^2 + \widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta^3 + \xi^3\eta^2 + O(6), \tag{6.3.2}$$

hvor $c_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2}}{\psi_{3,2}}$ og $\widetilde{\psi}_{1,3} = \frac{\psi_{1,3}}{\psi_{3,2}}$.

Analysen foretages nu igen på det trunkerede system.

Det dynamiske system bliver efter skalering af tiden med $t \to \eta t$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi(2c_{1,2} + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\eta + 2\xi^2) && (6.3.3a)\\ \dot{\eta} &= -\eta(c_{1,2} + \widetilde{\psi}_{1,3}\eta + 3\xi^2). && (6.3.3b) \end{aligned}$$

[3]Denne udfoldning er et specialtilfælde af en udfoldning som findes i Petersen [2002a].

Det ses umiddelbart, at der igen er et kritisk punkt i $(\xi, \eta) = (0, 0)$ og en strømlinje i $\xi = 0$.

Andre kritiske punkter på væggen ($\eta = 0$) findes

$$2c_{1,2} + 2\xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = \pm\sqrt{-c_{1,2}}$$

Det ses at for $c_{1,2} < 0$ er der i alt tre kritiske punkter på væggen, og for $c_{1,2} > 0$ er der et kritisk punkt på væggen.

De kritiske punkter i væsken $(\eta \neq 0)$ findes ved at løse følgende to ligninger:

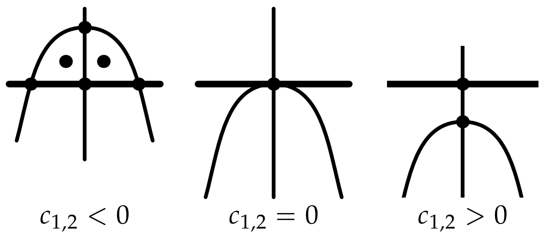
$$\begin{aligned} 0 &= \xi(2c_{1,2} + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\eta + 2\xi^2) \\ 0 &= c_{1,2} + \widetilde{\psi}_{1,3}\eta + 3\xi^2. \end{aligned}$$

Det ses at $(\xi, \eta) = (0, -\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}})$ er en løsning, og man kan finde at

$$(\xi, \eta) = (\pm\sqrt{-\frac{1}{7}c_{1,2}}, -\frac{4}{7}\frac{c_{1,2}}{\psi_{1,3}})$$

er en løsning. For $c_{1,2} < 0$ er der dermed tre kritiske punkter i væsken og for $c_{1,2} > 0$ er der kun det ene på η-aksen.

Typen af de kritiske punkter findes ved at se på Jacobideterminanten evalueret i det kritiske punkt, og man finder at for $c_{1,2} \neq 0$ er der ingen degenererede kritiske punkter. Strømlinjerne findes ved, at finde nulkurver for ψ.



Figur 6.3 Symmetribevarende udfoldning af den organiserende strømning for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$.

Alt i alt findes det på figur 6.3 viste bifurkationsdiagram. Det ses, at for $c_{1,2} < 0$ opstår den simple dobbeltboble. Denne topologi er altså stabil, så længe der kun tillades perturbationer, der er symmetriske op til femte orden.

6.4 Normalform af den fuldstændige udfoldning

I dette afsnit laver vi en fuldstændig udfoldning af den organiserende strømning (se lingning 6.1.3). Vi indfører små parametre, $\varepsilon_{i,j}$ (herefter benævnes de samlet ε), som koefficienter istedet for de koefficienter, som vi krævede var nul på grund af symmetrien, og den koefficient som vi krævede var nul for at det kritiske punkt i origo var degenereret. Vi udfolder igen under antagelse af, at der er en væg langs x-aksen

$$\begin{aligned}\psi = \quad & \varepsilon_{0,2}y^2 + \varepsilon_{0,3}y^3 + \varepsilon_{1,2}xy^2 + \varepsilon_{2,2}x^2y^2 + \varepsilon_{0,4}y^4 + \\ & \psi_{1,3}xy^3 + \psi_{3,2}x^3y^2 + \psi_{1,4}xy^4 + \varepsilon_{2,3}x^2y^3 + \varepsilon_{0,5}y^5 + O(6)\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Vi konstruerer nu en transformation således at vi opnår en normalform med færre parametre, og således at denne normalform reducerer til normalformen for den degenererede strømning, når parametrene er nul.

I strømlinjefunktionen for det transformerede system regner vi til første orden i ε samtidig med, at vi regner til femte orden i ξ og η, fordi de led af højeste orden som vi tilføjer ved udfoldningen er af femte orden i ξ og η. Det er ikke hensigtsmæssigt at sammenfatte dette ved ialt at regne til sjette orden, fordi det ville give led af sjette orden i ξ og η, og disse led var ikke med som udgangspunkt. Derfor holder vi styr på de to ordener hver for sig. Vi udelader led, der enten er af anden orden eller højere i ε eller som er af sjette orden eller højere i ξ og η. Vi indfører notation $O(i,j)$, hvor i er ordenen i ξ og η, og j er ordenen i ε.

For at transformationen kan fjerne led, hvori der indgår en af de små parametre ε, skal den naturligvis være afhængig af ε. Da vi kun regner til førstse orden i ε, er det imidlertid oplagt kun nødvendigt at lade transformationen have en førsteordensafhængighed af ε.

Vi ønsker, som altid, en kanonisk transformation, og konstruerer denne med udgangspunkt i en genererende funktion.

Som tidligere ønsker vi endvidere, at $y = 0$ medfører at $\eta = 0$, hvilket betyder at alle led i $\eta = \frac{\partial S}{\partial \xi}$ og dermed i S skal indeholde en faktor y.

Den genererende funktion vi benytter har formen

$$\begin{aligned} S = \xi y + y^2 & \left(\sum_{k+l+m+n+o+p+q \le 1} s_{0,2,k,l,m,n,o,p,q} \varepsilon_{0,2}^k \varepsilon_{0,3}^l \varepsilon_{1,2}^m \varepsilon_{2,2}^n \varepsilon_{0,4}^o \varepsilon_{2,3}^p \varepsilon_{0,5}^q \right) + \\ y \sum_{i+j=2} \xi^i y^j & \left(\sum_{k+l+m+n+o+p+q \le 1} s_{i,j+1,k,l,m,n,o,p,q} \varepsilon_{0,2}^k \varepsilon_{0,3}^l \varepsilon_{1,2}^m \varepsilon_{2,2}^n \varepsilon_{0,4}^o \varepsilon_{2,3}^p \varepsilon_{0,5}^q \right). \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Ud fra den sædvanlige sammenhæng (jvf. afsnit 3.2.1)

$$x = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial S}{\partial \xi} \tag{6.4.3}$$

løser vi for x og y til fjerde orden i ξ og η og til første orden i ε. Løsningerne får strukturen

$$x = \xi + \sum_{2 \le i+j \le 4} \xi^i \eta^j \left(\sum_{k+l+m+n+o+p+q \le 1} \lambda_{i,j,k,l,m,n,o,p,q} \varepsilon_{0,2}^k \varepsilon_{0,3}^l \varepsilon_{1,2}^m \varepsilon_{2,2}^n \varepsilon_{0,4}^o \varepsilon_{2,3}^p \varepsilon_{0,5}^q \right) + O(5,2) \tag{6.4.4}$$

$$y = \eta \left(1 + \sum_{1 \le i+j \le 3} \xi^i \eta^j \left(\sum_{k+l+m+n+o+p+q \le 1} \kappa_{i,j+1,k,l,m,n,o,p,q} \varepsilon_{0,2}^k \varepsilon_{0,3}^l \varepsilon_{1,2}^m \varepsilon_{2,2}^n \varepsilon_{0,4}^o \varepsilon_{2,3}^p \varepsilon_{0,5}^q \right) \right) + O(5,2),$$

hvor koefficienterne $\lambda_{i,j,k,\ldots}$ og $\kappa_{i,j,k,\ldots}$ afhænger af koefficienterne $s_{i,j,k,\ldots}$.

Det er tilstrækkeligt at medtage led af fjerde orden i ξ og η, fordi led af femte orden eller derover kun vil bidrage til led af sjette orden eller derover i ξ og η i strømlinjefunktionen. Dette skyldes dels at transformationen ikke indeholder nulteordensled i ξ og η og dels, at ledet af laveste orden i strømlinjefunktionen er af anden orden i y.

Når vi ikke vælger at medtage led af lavere orden i den genererende funktion, skyldes det udelukkende, at det er nemmere, fordi det tillader os at nøjes med at løse for x og y til fjerde orden i ξ og η. Desuden kan det nemt gøres efterfølgende. Ligeledes vil vi også skalere afslutningsvis, hvilket er grunden til at en skaleringsfaktor på ξy-ledet [4] er udeladt. Den endelige transformation konstrueres altså i flere trin.

I første trin indsættes udtrykkene for x og y (ligning 6.4.4) i strømlinjefunktionen (ligning 6.4.1). Koefficienterne $s_{i,j,k,\ldots}$ vælges således at flest mulige led i ξ og η går ud i strømlinjefunktionen. Dette gøres i praksis ved at sortere ledene efter orden i ξ og η og dernæst danne en ligning for hvert ε-led. Disse ligninger løses med hensyn til et sæt af koefficienterne $s_{i,j,k,\ldots}$, som vælges ved at inspicere hvilke koefficienter $s_{i,j,k,\ldots}$, der indgår lineært.

Ved at bertragte strukturen af strømlinjefunktionen ligning 6.4.1 og den inverse transformation 6.4.4, kan man overbevise sig om[5] at transformationen kun kan fjerne led af fjerde orden eller derover. Desuden kan de led som indgik i normalformen for den degenererede strømning som ventet og ønsket ikke fjernes[6].

Den genererende funktion får formen

$$
\begin{aligned}
S = \xi\, y &+ \left(3/2\,\frac{\psi_{1,4}\varepsilon_{0,3}}{{\psi_{1,3}}^2} - 1/2\,\frac{\varepsilon_{0,4}}{\psi_{1,3}} - 5/2\,\frac{{\psi_{1,4}}^2\varepsilon_{0,2}}{{\psi_{1,3}}^3}\right) y^2 \\
&+ \left(1/5\,\frac{\varepsilon_{2,3}}{\psi_{1,3}} + 9/5\,\frac{\psi_{3,2}\psi_{1,4}\varepsilon_{0,3}}{{\psi_{1,3}}^3} - 3\,\frac{\psi_{3,2}{\psi_{1,4}}^2\varepsilon_{0,2}}{{\psi_{1,3}}^4} - 3/5\,\frac{\psi_{3,2}\varepsilon_{0,4}}{{\psi_{1,3}}^2} + 2/5\,\frac{\psi_{1,4}\varepsilon_{2,2}}{{\psi_{1,3}}^2}\right) y\xi^2 \\
&+ \left(\frac{\psi_{1,4}}{\psi_{1,3}} - \frac{{\psi_{1,4}}^2\varepsilon_{1,2}}{{\psi_{1,3}}^3}\right) y^2\xi + \left(1/3\,\frac{\psi_{1,4}\varepsilon_{0,4}}{{\psi_{1,3}}^2} - 1/3\,\frac{\varepsilon_{0,5}}{\psi_{1,3}} - 1/3\,\frac{{\psi_{1,4}}^3\varepsilon_{0,2}}{{\psi_{1,3}}^4}\right) y^3
\end{aligned}
\tag{6.4.5}
$$

hvoraf det ses at eksistensen af transformationen, ligesom for normalformstransformationen af den organiserende strømning, kræver at $\psi_{1,3} \neq 0$. Strømlinjefunktionen bliver ved denne transformation

$$
\begin{aligned}
\psi &= \varepsilon_{0,2}\eta^2 + \varepsilon_{1,2}\xi\,\eta^2 + \left(\varepsilon_{0,3} - 2\,\frac{\psi_{1,4}\varepsilon_{0,2}}{\psi_{1,3}}\right)\eta^3 \\
&\quad + \varepsilon_{2,2}\eta^2\xi^2 + \psi_{1,3}\eta^3\xi + \psi_{3,2}\eta^2\xi^3 + O(6,2)
\end{aligned}
\tag{6.4.6}
$$

Strømlinjefunktionen simplificeres yderligere ved en translation langs ξ-aksen $\xi \to \xi - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_{2,2}}{\psi_{3,2}}$, og ved at skalere τ med $\psi_{3,2}$.

[4] Det led som giver hhv. ξ- og η-ledet i rækken for x og y.

[5] Essensen er at det kun er der, hvor x- og y-rækkerne fra ligning 6.4.4 indsættes i led i strømlinjefunktionen som ikke indeholder et ε, at der dannes led, som har mulighed for at udligne de $\varepsilon_{i,j}\xi^i\eta^j$-led (eller $\psi_{i,j}\xi^i\eta^j$) som nødvendigvis opstår. Det led af laveste orden, uden en ε koefficient, er af fjerde orden, og transformationen indeholder ingen nulteordensled, hvilket ialt betyder at led af lavere orden end fire ikke kan "forsvinde" ved transformationen.

[6] Dette kan også indses ved et argument af samme type som i foregående fodnote.

Normalformen for udfoldningen bliver endelig

$$\psi = c_{0,2}\eta^2 + c_{1,2}\xi\eta^2 + c_{0,3}\eta^3 + \widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta^3 + \xi^3\eta^2 + O(6,2) \tag{6.4.7}$$

hvor de små parametre er samlet i nye kombinerede små parametre c:

$$c_{0,2} = \frac{\varepsilon_{0,2}}{\psi_{3,2}}\,,\quad c_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2}}{\psi_{3,2}}\,,\quad c_{0,3} = \left(\frac{\varepsilon_{0,3}}{a_{3,2}} - 2\,\frac{a_{1,4}\varepsilon_{0,2}}{a_{3,2}a_{1,3}} - \frac{1}{3}\,\frac{a_{1,3}\varepsilon_{2,2}}{a_{3,2}{}^2}\right) \tag{6.4.8a}$$

og hvor

$$\widetilde{\psi}_{1,3} = \frac{\psi_{1,3}}{\psi_{3,2}}. \tag{6.4.8b}$$

Bemærk at c går mod nul for ε gående mod nul. Det er altså ægte små parametre.

I næste afsnit bestemmer vi udfoldningdiagrammet for normalformen i ligning 6.4.7.

6.5 Udfoldningsdiagrammet

Efter at vi nu er nået frem til en normalform (se ligning 6.4.7) for udfoldningen af den organiserende strømning, vil vi her konstruere udfoldningssdiagrammet ud fra den trunkerede normalform:

$$\psi = c_{0,2}\eta^2 + c_{1,2}\xi\eta^2 + c_{0,3}\eta^3 + \widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta^3 + \xi^3\eta^2 \tag{6.5.1}$$

I analysen af selve den organiserende strømning (afsnit 6.2) blev det fundet, at et fortegnsskift af $\widetilde{\psi}_{1,3}$ svarer til en spejling i ξ aksen. Her er situationen næsten den samme, blot svarer et fortegnsskift i $\widetilde{\psi}_{1,3}$ her dels til en spejling i ξ aksen og dels et skift af fortegnet på $c_{0,3}$. På denne baggrund vælger vi kun at analysere udfoldningen for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$. Det modsatte fortegn ville give et bifurkationsdiagram med nøjagtig den samme information. Det ville blot være spejlet i forhold til det vi finder.

Ud fra denne trunkerede normalform fås følgende dynamiske system, efter skalering af τ med η:

$$\dot{\xi} = 2c_{0,2} + 2c_{1,2}\xi + 3c_{0,3}\eta + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta + 2\xi^3 \tag{6.5.2a}$$

$$\dot{\eta} = -c_{1,2}\eta - \widetilde{\psi}_{1,3}\eta^2 - 3\xi^2\eta \tag{6.5.2b}$$

med den generelle Jacobimatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2c_{1,2} + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\eta + 6\xi^2 & 3c_{0,3} + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\xi \\ -6\xi\eta & -c_{1,2} - 2\widetilde{\psi}_{1,3}\eta - 3\xi^2 \end{bmatrix}. \tag{6.5.3}$$

Som beskrevet tidligere (se afsnit 2.4.3) konstrueres udfoldningsdiagrammet ved at lede efter flader, hvor strømningen er degenereret.

Det første skridt er at finde kritiske punkters position som funktion af udfoldningsparametrene, og dernæst bestemme deres type ved at bestemme fortegnet af Jacobimatricen evalueret i de kritiske punkter. Samtidig bestemmes de flader i parameterrummet, hvor Jacobideterminanten evalueret i et af de kritiske punkter er nul.

I praksis viser der sig dog at være en lettere måde at finde nogle af bifurkationsfladerne på. Når antallet af kritiske punkter ændrer sig, er det en bifurkation, da strømningen ændrer topologi. Man kan derfor finde bifurkationsflader ved at lede efter flader, hvor antallet af kritisk punkter ændrer sig. Problemet med denne metode er, at man ikke kan være sikker på at finde alle bifurkationsflader, da man ikke vil finde flader, hvor et enkelt kritisk punkt ændrer type. I det følgende benytter vi derfor en kombination af de to metoder, og i praksis viser det sig, at der ikke er nogle kritiske punkter, som skifter type, uden at antallet af kritiske punkter ændrer sig.

En anden type bifurkationsflader, som skal findes, er flader i udfoldningsparameterrummet hvor der sker en global bifurkation. Det vil sige flader, hvor der er strømlinjer som forbinder sadler på væggen med sadler i væsken, eller strømlinjer som forbinder forskellige sadler i væsken (jvf. afsnit 2.4.2). I praksis findes disse bifurkationsflader ved at finde flader hvor strømlinjefunktionen antager samme værdi i to sadler, og derefter undersøges det om der rent faktisk er en strømlinje, som forbinder disse to.

6.5.1 Bifurkationer på væggen

Først bestemmer vi positionen af de kritiske punkter på væggen. Det vil sige, vi løser

$$\dot{\xi} = 0 \text{ og } \dot{\eta} = 0 \text{ under den antagelse at } \eta = 0 \tag{6.5.4}$$

Det ses af ligning 6.5.2 at dette svarer til at løse følgende tredjegradsligning for ξ:

$$0 = c_{0,2} + c_{1,2}\xi + \xi^3. \tag{6.5.5}$$

Der er altså enten ét eller tre kritiske punkter på væggen. Flader hvor antallet af kritiske punkter ændrer sig findes ved at finde flader, hvor diskriminanten[7] for 6.5.5 er nul. Man finder at fladen er beskrevet ved

$$0 = -4\,{c_{1,2}}^3 - 27\,{c_{0,2}}^2. \tag{6.5.6}$$

Man kan eksplicit beskrive denne flade ved:

$$c_{0,2} = \pm\sqrt{-\frac{4}{27}c_{1,2}^3}. \tag{6.5.7}$$

[7] Vi benytter en diskriminantfunktion som definerer diskriminanten for $ax^3 + bx^2 + cx + d$ til at være $-27\,a^2d^2 + 18\,adbc + b^2c^2 - 4\,b^3d - 4\,ac^3$

Der er dermed ingen ændringer i antallet af kritiske punkter på væggen, i den del af parameterrummet hvor $c_{1,2} > 0$.

Ved at indsætte løsningerne til 6.5.5 i ligning 6.5.3 og finde flader, hvor determinanten er 0 findes præcis disse to flader. Det betyder, at der ikke er nogen kritiske punkter på væggen, som bliver degenererede, uden at antallet af kritiske punker på væggen ændrer sig.

6.5.2 Bifurkationer i væsken

Positionen af de kritiske punkter i væsken bestemmes ved at løse:

$$0 = 2c_{0,2} + 2c_{1,2}\xi + 3c_{0,3}\eta + 3\widetilde{\psi}_{1,3}\xi\eta + 2\xi^3 \qquad (6.5.8a)$$

$$0 = -c_{1,2} - \widetilde{\psi}_{1,3}\eta - 3\xi^2 \qquad (6.5.8b)$$

Dette ligningssystem svarer til at sætte $\dot{\xi} = 0$ og $\dot{\eta} = 0$ i 6.5.2, bortset fra at de løsninger som svarer til de før fundne kritiske punkter på væggen $(\eta = 0)$, er fjernet ved at dividere $\dot{\eta}$ med η.

Man finder, at der kan være en eller tre løsninger til dette ligningssystem. De kan alle skrives på følgende form:

$$\xi = z_0 \quad , \quad \eta = -\frac{3z_0^2 + c_{1,2}}{\widetilde{\psi}_{1,3}}, \qquad (6.5.9)$$

hvor de forskellige løsninger findes ved at lade z_0 antage løsningsværdierne til følgende tredjegradsligning på skift

$$0 = 7\widetilde{\psi}_{1,3}z_0^3 + 9\,c_{0,3}{z_0}^2 + c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}z_0 + 3c_{0,3}c_{1,2} - 2c_{0,2}\widetilde{\psi}_{1,3}. \qquad (6.5.10)$$

Man kan dermed finde bifurkationsflader, hvor antallet af kritiske punkter i væsken ændres ved at finde nulpunkter for diskriminanten hørende til ligning 6.5.10:

$$\begin{aligned} &- 28\,{c_{1,2}}^3\widetilde{\psi}_{1,3}^4 - 8424\,{c_{1,2}}^2\widetilde{\psi}_{1,3}^2{c_{0,3}}^2 - 8748\,c_{1,2}{c_{0,3}}^4 \\ &\quad + 13608\,c_{0,3}c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}^3c_{0,2} - 5292\,\widetilde{\psi}_{1,3}^4{c_{0,2}}^2 + 5832\,\widetilde{\psi}_{1,3}c_{0,2}{c_{0,3}}^3 = 0. \end{aligned} \qquad (6.5.11)$$

Ved at løse for $c_{0,2}$ får vi følgende udtryk:

$$c_{0,2} = \frac{1}{441}\,\frac{567\,c_{0,3}c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}^2 + 243\,{c_{0,3}}^3 \pm \sqrt{3}\sqrt{\left(-7\,c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}^2 + 27\,{c_{0,3}}^2\right)^3}}{\widetilde{\psi}_{1,3}^3} \qquad (6.5.12)$$

Disse bifurkationsflader eksisterer dermed kun for:

$$-7\,c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}^2 + 27\,{c_{0,3}}^2 > 0 \qquad (6.5.13)$$

Ved at indsætte positionen af de kritiske punkter (jvf ligning 6.5.9) i den generelle Jacobimatrix (ligning 6.5.3) og finde flader, hvor determinanten er nul, genfindes de to bifurkationsflader, som blev fundet ved at finde flader, hvor antallet af kritiske punker ændre sig.

De to strømninger under og over væggen er, som vi tidligere har skrevet, ikke fysisk knyttet til hinanden. Det er derfor en bifurkation, hvis η-positionen af et de kritiske punkter, vi har fundet i væsken, skifter fortegn. Disse flader findes ved at undersøge, hvornår de kritiske punkter, som er fundet ved at løse ligning 6.5.8a har koordinater af typen $(\xi, 0)$. Disse flader viser sig at falde sammen med de bifurkationsflader i udfoldningsparameterrummet, hvor antallet af kritiske punkter på væggen ændrer sig. Endvidere findes det at det kritiske punkt i væsken skifter type samtidigt med at det "krydser" væggen.

6.5.3 Globale bifurkationer

Først findes flader i udfoldningsparameterrummet, hvor der er mulighed for at en strømlinje forbinder en sadler i væsken med en saddel på væggen.

Disse flader er bestemt ved at indsætte positionen af de kritiske punkter i væsken (ligning 6.5.9) i strømlinjefunktionen (ligning 6.5.1) og finde de flader, hvor strømlinjefunktionen antager samme værdi som strømlinjefunktionen har på væggen (per konstruktion er denne værdi 0).

Vi finder, at der kun er en flade, hvor dette er tilfældet. Denne er givet ved:

$$c_{0,2} = \frac{(c_{1,2}\widetilde{\psi}_{1,3}^2 + c_{0,3}^2)c_{0,3}}{\widetilde{\psi}_{1,3}^3}. \tag{6.5.14}$$

Ved inspektion er det fundet, at der rent faktisk er en heteroklinisk forbindelse, i strømningerne hørende til denne flade.

Den sidste type degenererethed, som man skal se efter, er den type, hvor to sadler i væsken er forbundet via en strømlinje. I princippet kan flader hvor dette sker, findes ved at bestemme hvornår strømlinjefunktionen evalueret i to saddelpunkter i væsken antager samme værdi. I praksis har vi dog ikke været i stand til at finde et analytisk udtryk for flader med denne type degenererethed. Igennem vores analyse af systemet har vi fundet steder i rummet, hvor en sådan bifurkation må findes[8]. På de snit i parameterrummet som vil blive præsenteret, har vi derefter numerisk bestemt disse bifurkationskurver. Vi kan altså ikke udelukke at der findes andre flader med denne bifurkation, men bifurkationsdiagrammet tyder ikke på det.

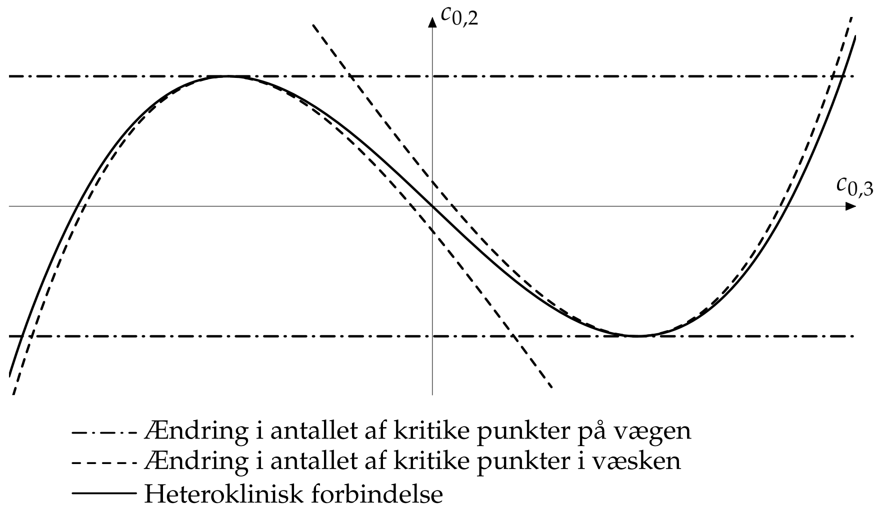
6.5.4 Bifurkationsdiagrammet

Efter at have bestemt hvor bifurkationsflader og -linjer ligger, bestemmes topologierne af de strømninger som findes i de forskellige områder og på de

[8] Tilsvarende bifurkationer findes i Hartnack [1999b] i forbindelse med behandling af degenererede punkter i væsken.

forskellige bifurkationsflader og linjer. I forbindelse med at bifurkationsdiagrammet blev bestemt, bestemtes de fleste karakteristika ved strømningerne samtidigt (for eksempel antallet af kritiske punkter). Yderligere detaljer er fundet ved at tegne[9] strømningerne med udgangspunkt i et sæt parameterværdier fra hvert enkelt område (og hver enkel bifurkationsflade).

Da det er svært at håndtere de tredimensionelle flader i udfoldningsparameterrummet har vi valgt at illustrere bifurkationsdiagrammet ved to snit gennem rummet. Bifurkationsfladerne bliver her kurver.



Figur 6.4 De analytisk fundne bifurkationslinjer for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$ og $c_{1,2} < 0$.

Vi har valgt snit som er parallelle med $c_{1,2} = 0$ planet. Da der i snittet for $c_{1,2} < 0$ er mange forskellige strømningstopologier, bliver det svært at overskue hele diagrammet, vi har derfor delt beskrivelsen i to figurer.

Figur 6.4 viser de tre bifurkationskurver som vi har fundet eksakt. Figur 6.5 viser et passende udsnit af dette diagram. Da der er en symmetri i diagrammet, viser dette udsnit alle mulige bifurkationer og strømninger (hvis man blot spejler de forskellige strømninger passende).

På figur 6.6 ses et snit med $c_{1,2} > 0$.

For begge snit fra udfoldningsdiagrammet gælder at alle de indtegnede skæringer mellem kurver har lokal karakter, forstået på den måde, at hvis man lader $c_{1,2}$ gå mod nul, går de mod origo i diagrammet. Det gælder også at alle degenererede strømninger på bifurkationskurver (flader i det tredimensionelle udfoldningsparameterrum) har kodimension en, og degenererede strømninger i skæringspunkter (kurver i det tredimensionelle udfoldningsparameterrum)

[9]Tegningerne er i praksis lavet ved at bestemme strømlinjefunktionens værdi i de kritiske punkter og dernæst plotte strømlinjefunktionens ækvikurver for disse værdier med Maple7 plottefunktionen plot_real_curve. Se også appendiks B.

mellem bifurkationskurver har kodimension to. Det betyder ialt, at vores diagram opfylder de krav vi har stillet til et sådan (se afsnit 2.4.3).

6.5.5 Udfoldning af dobbeltboblen

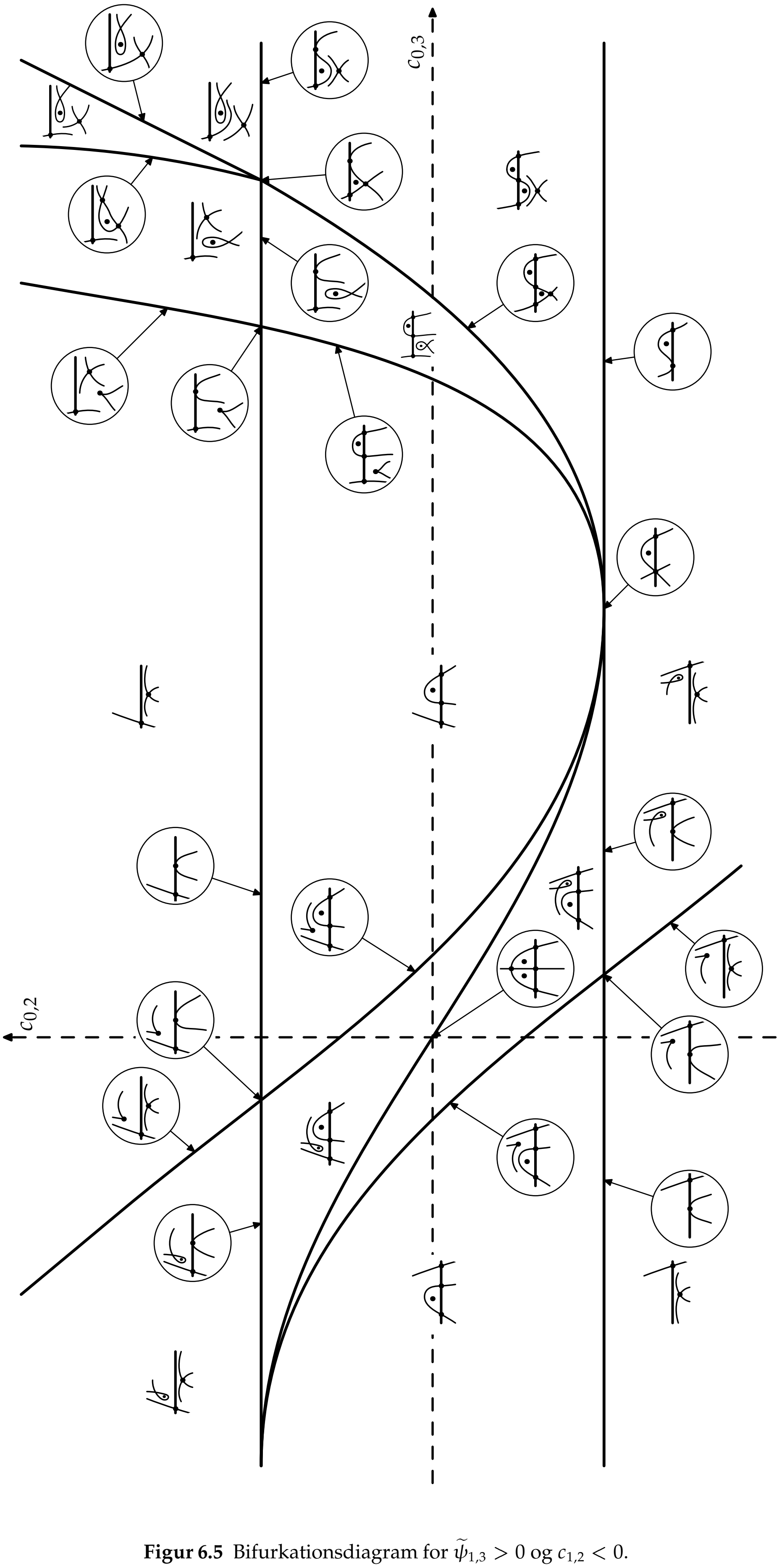
I den fuldstændige udfoldning af den organiserende strømning ligger dobbeltboblen på en bifurkationsflade. Denne bifurkationsflade ses som en linje gennem origo i figur 6.5. Det vil altså sige, at dobbeltboblen er en ustabil strømning, når der tillades asymmetriske perturbationer, i modsætning til når der kun tillades symmetriske perturbationer. Degenereretheden svarer til enhver anden global degenererethed, idet der ikke er noget, der fastholder strømlinjefunktionens værdi i sadlen (i væsken) til at være nul, når der ikke er symmetri.

Specielt i origo i figur 6.5, findes den symmetriske dobbeltboble. Det er interessant for os at betragte denne figur som en udfoldning af denne symmetriske dobbeltboble. Det er imidlertid ikke helt trivielt at udfolde en global degenererethed. Dette skyldes, at den globale degenererethed aldrig kan opfylde kravet om at alle væsentlige karakteristika skal ligge i origo af (ξ, η)-rummet, når man er i origo af udfoldningsparameterrummet.

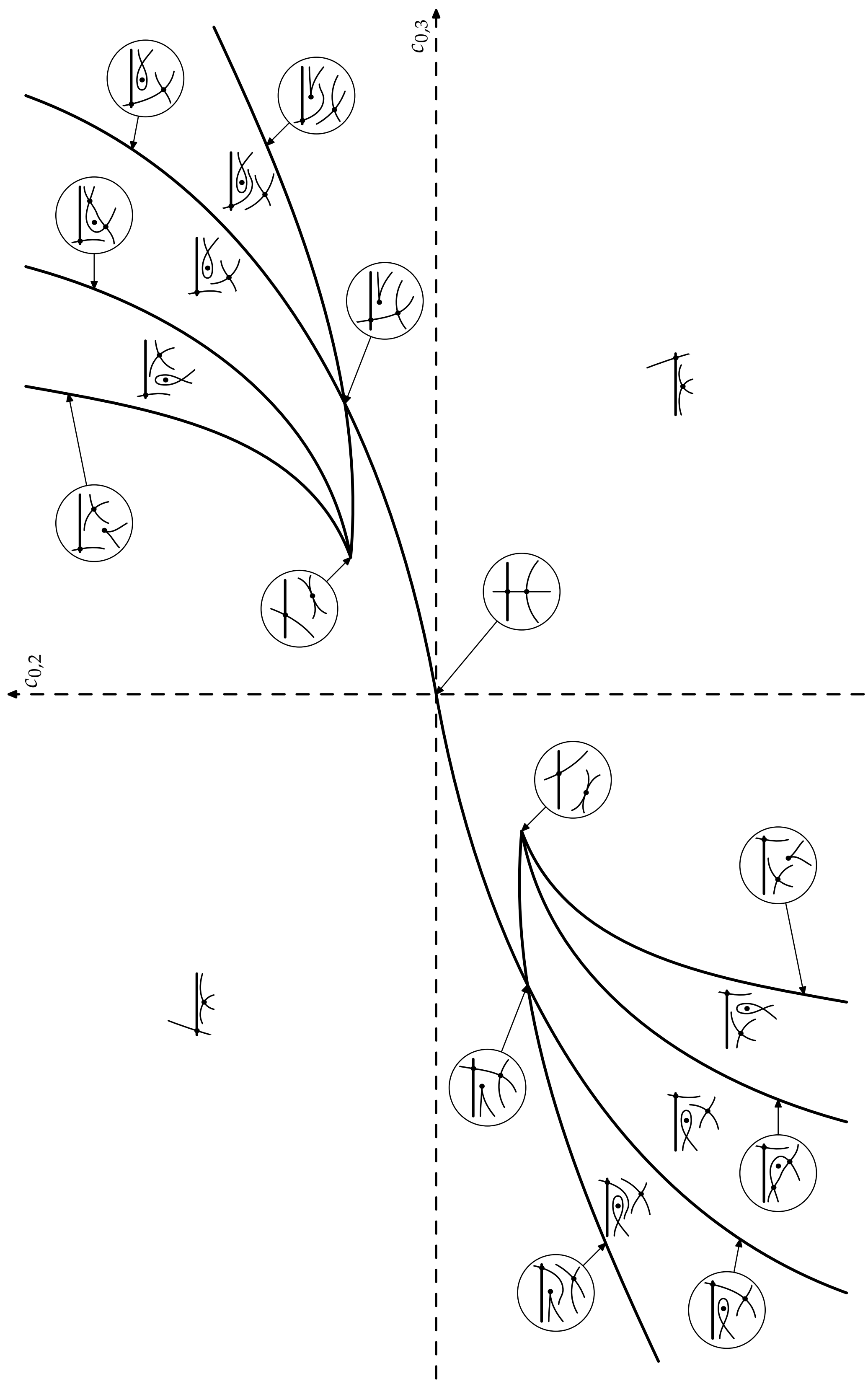
Udfoldningen af den organiserende strømning fortæller, at der eksisterer en dobbeltboble vilkårlig tæt på denne strømning. De øvrige strømninger eksisterer også vilkårlig tæt på den organiserende strømning, og dermed ligger de vilkårlig tæt på dobbeltboblen. Problemet er, at når vi bruger dette resultat, kan vi ikke antage noget om dobbeltboblens størrelse. Dette skyldes, at afstanden mellem topologerne kun kan gøres vilkårlig små, ved at man nærmer sig origo i udfoldningsparameterrummet tilstrækkeligt, hvilket samtidigt har den konsekvens, at alle karakteristika for strømningen nærmer sig origo i (ξ, η)-planet.

Det betyder, at det for en given simpel dobbeltboble ikke umiddelbart er muligt at vide, om de andre topologier i diagrammet ligger i nærheden af den. Det vil kun være tilfældet hvis dobbeltboblen ligner den trunkerede dobbeltboble til en eller anden højere orden.

For at tolke diagrammet i figur 6.5 som en udfoldning af en dobbeltboble med endelig størrelse er det for det første nødvendigt at antage, at dobbeltboblen ikke har yderligere degenereretheder. Det vil sige, vi antager, at det faktisk er den simple dobbeltboble. Desuden er de eneste bifurkationslinjer i diagrammet, der kan inddrages, de kurver som går gennem origo. Det vil i praksis sige den ene kurve hvorpå dobbeltboblen ligger. Udfoldningen af den simple dobbeltboble er altså de strømningstopologier som ligger på henholdsvis den ene og den anden side af linjer gennem origo i figur 6.5.



Figur 6.5 Bifurkationsdiagram for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$ og $c_{1,2} < 0$.



Figur 6.6 Bifurkationsdiagram for $\widetilde{\psi}_{1,3} > 0$ og $c_{1,2} > 0$.

7 Analyse af casen

I dette kapitel anvender vi de generelle resultater angående sammenspillet mellem topologi og Hopfbifurkation, som vi fandt i kapitel 5.

Vi undersøger hvilke konsekvenser det har, hvis den organiserende strømning (se afsnit 6.1) er den stationære strømning som Hopfbifurkerer. Dette har primært interesse, fordi denne strømning er den mest degenererede strømning, vi har behandlet, og derfor er der størst chance for, at komme frem til betydende krav ved denne strømning.

Da vi specielt interesserer os for dynamikken bag en cylinder, vil vi også undersøge hvilken betydning det har, hvis det er dobbeltboble strømning, der er den stationære strømning i forbindelse med Hopfbifurkationen.

7.1 Repetition af notation

Analysen er i direkte forlængelse af kapitel 5. Vi benytter derfor notationerne fra dette afsnit, og vi vil her kort opsummere disse.

En stationær strømning betegnes ψ_0, og rækkeudvikles som i ligning 5.2.8b. Vi skriver altså f.eks den organiserende strømning (ligning 6.1.3) som:

$$\psi_0 = a_{1,3}xy^3 + a_{3,2}x^3y^2 + a_{1,4}xy^4 + O(6) \tag{7.1.1}$$

når den betragtes som en stationær strømning.

Tilsvarende betegnes den samlede periodiske strømning efter Hopfbifurkationen ψ, og den kan skrives som (jvf. ligning 5.2.7):

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \simeq \psi_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \left(e^{i\beta_0 t}\psi_1(\boldsymbol{x}) + e^{-i\beta_0 t}\psi_1^*(\boldsymbol{x}) \right),$$

hvor ψ_1 er en kompleks strømlinjefunktion, som beskriver amplitude og fase af den tidslige perturbation.

Den samlede strømlinjefunktion rækkeudvikles som i ligning 5.2.8a:

$$\psi = \sum_{m+n=1}^{k} \psi_{n,m} x^n y^m + O(k+1)$$

og ψ_1 rækkeudvikles som i ligning 5.2.8c:

$$\psi_1 = \sum_{m+n=1}^{k} b_{n,m} x^n y^m + O(k+1).$$

Sammenhængen mellem Taylorkoefficienterne for de tre rækker er givet ved (jvf. ligning 5.2.9):

$$\psi_{n,m} \simeq a_{n,m} + \varepsilon(e^{i\beta_0 t} b_{n,m} + e^{-i\beta_0 t} b^*_{n,m}) \tag{7.1.2}$$

I det følgende vil vi først analysere, hvilke af de fundne strømninger der kan eksistere som stationære strømninger. Derefter undersøges det, om der er krav til hvilke værdier $b_{i,j}$'erne kan antage. Som beskrevet i afsnit 5.5 kan disse krav oversættes til krav på hvilke sekvenser af topologier, der kan forekomme efter Hopfbifurkationen.

7.2 Krav fra Navier-Stokes ligning

Vi vil først undersøge om selve den organiserende strømning kan eksistere som en stationær strømning. Vi indsætter altså Taylorkoefficienterne for denne (jvf. ligning 7.1.1), i ligningerne 5.3.2. Vi finder, at det kun er fra ligningen hørende til $x^1 y^0$, at der kommer krav. Denne ligning betyder, at følgende skal gælde:

$$a_{3,2} = -a_{1,4}. \tag{7.2.1}$$

Bemærk at det ikke er koefficienterne i den transformerede strømlinjefunktion, som skal indsættes, men koefficienterne i den oprindelige strømlinjefunktion. De krav man får, skal derefter oversættes til krav på de transformerede koefficienter.

Hvis man betragter normalformen for den organiserende strømning (ligning 6.2.5) ses det, at dette krav ikke har nogen betydning, da koefficienten $a_{1,4}$ bliver transformeret væk. Det betyder altså, at den organiserende strømning kan eksistere som en stationær strømning.

Hvis man på tilsvarende vis indsætter Taylorkoefficienterne for udfoldningen (ligning 6.4.1) finder man ud over det før fundne krav, følgende to krav som udfoldningsparametrene skal opfylde:

$$\varepsilon_{2,2} = -3\varepsilon_{0,4}, \tag{7.2.2}$$

$$\varepsilon_{0,5} = \frac{1}{30}\varepsilon_{0,2}\varepsilon_{1,2}\mathrm{Re} - \frac{1}{5}\,\varepsilon_{2,3}. \tag{7.2.3}$$

Af normalformen for udfoldningen (ligning 6.4.7 og ligningerne 6.4.8) ses det, at disse krav heller ikke har nogen betydning, da udfoldningsparametrene $\varepsilon_{0,4}$ og $\varepsilon_{0,5}$ bliver transformeret væk. Der er altså ingen bånd på de transformerede udfoldningsparametre. Dermed kan alle de topologier, som vi finder i udfoldningen findes som stationære strømninger. Det betyder specielt at dobbeltboble strømningen kan eksistere som stationær strømning, da denne fremkommer ved at sætte alle udfoldningsparametre undtagen $\varepsilon_{1,2}$ til nul.

Som tidligere nævnt, findes der i Bakker [1991] en analyse og udfoldning af den organiserende strømning lavet under den antagelse, at den stationære Navier-Stokes ligning er opfyldt. Den udfoldning der findes i Bakker [1991], tilsvarer den vi har fundet i foregående kapitel. Dette skyldes, at kravene fra den stationære Navier-Stokes ligning, som vi netop har redegjort for, ikke viser sig at have betydning for topologierne i nærheden af denne strømning.

7.3 Krav fra Hopfbifurkationen

I afsnit 5.4 fandt vi en række af generelle krav (ligningerne 5.4.2), som skal gælde for $b_{i,j}$'erne i rækken for den tidsafhængige perturbation. Vi beskrev desuden i afsnit 5.5, hvordan den periodiske strømning efter Hopfbifurkationen, kan fortolkes som tidsafhængighed i de transformerede udfoldningsparametre. Vi vil nu undersøge om kravene på $b_{i,j}$'erne lægger begrænsninger på disse transformerede tidsafhængige parametre, i forbindelse med at den organiserende strømning Hopfbifurkerer.

I ligning (6.4.8a) har vi konkrete udtryk for de transformerede parametre. Vi indsætter nu koefficienter af typen

$$\psi_{n,m} \simeq a_{n,m} + \varepsilon(e^{i\beta_0 t} b_{n,m} + e^{-i\beta_0 t} b^*_{n,m})$$

i disse udtryk. Specielt lader vi $a_{i,j}$'erne være Taylorkoefficienterne for den organiserende strømning, mens $b_{i,j}$'erne i første omgang kun skal opfylde vægrandbetingelsen ($b_{i,0} = 0$ og $b_{i,1} = 0$ $i = 0, 1, 2..$ se afsnit 3.1.1). Led af anden orden eller derover i ε skæres væk, og vi får herefter følgende konkrete udtryk for de tidsafhængige transformerede parametre:

$$\begin{aligned}
c_{0,2} &= 2\,\frac{\varepsilon\,\left(\cos(\beta_0 t)\, b'_{0,2} - \sin(\beta_0 t)\, b''_{0,2}\right)}{a_{3,2}} && (7.3.1a)\\
c_{1,2} &= 2\,\frac{\varepsilon\,\left(\cos(\beta_0 t)\, b'_{1,2} - \sin(\beta_0 t)\, b''_{1,2}\right)}{a_{3,2}} && (7.3.1b)\\
c_{0,3} &= -\frac{2}{3}\,\frac{\varepsilon\,\left({a_{1,3}}^2 b'_{2,2} - 3\, b'_{0,3} a_{3,2} a_{1,3} + 6\, a_{1,4} b'_{0,2} a_{3,2}\right)\cos(\beta_0 t)}{{a_{3,2}}^2 a_{1,3}}\\
&\quad +\frac{2}{3}\,\frac{\varepsilon\,\left({a_{1,3}}^2 b''_{2,2} - 3\, b''_{0,3} a_{3,2} a_{1,3} + 6\, a_{1,4} b''_{0,2} a_{3,2}\right)\,\sin(\beta_0 t)}{{a_{3,2}}^2 a_{1,3}} && (7.3.1c)
\end{aligned}$$

hvor $b_{i,j} = b'_{i,j} + ib''_{i,j}$.

Vi undersøger nu, om der er krav på $b_{i,j}$'erne, som binder tidsafhængigheden af de transformerede udfoldningsparametre sammen.

Taylorkoefficienterne for den organiserende strømning (jvf. ligning 7.1.1) indsættes sammen med de før omtalte væg-krav i kravene fra Hopfbifurkationen (ligningerne 5.4.2), og man finder at følgende skal gælde:

$$0 = ib_{0,2}\beta_0 - \frac{12\, b_{0,4} + 4\, b_{2,2}}{\mathrm{Re}_0}, \qquad (7.3.2a)$$

$$0 = ib_{1,2}\beta_0 - \frac{12\, b_{1,4} + 12\, b_{3,2}}{\mathrm{Re}_0}, \qquad (7.3.2b)$$

$$0 = ib_{0,3}\beta_0 - \frac{20\, b_{0,5} + 4\, b_{2,3}}{\mathrm{Re}_0}. \qquad (7.3.2c)$$

Det ses ved at sammenholde kravene i disse ligninger (7.3.2) med de konkrete tidsafhængige udfoldningsparametre i ligning 7.3.1, at der i hver udfoldningsparameter indgår mindst en fri $b_{i,j}$ parameter. Dermed er der ikke nogen begrænsninger på, hvordan de tre udfoldningsparametre kan svinge, og dermed ingen begrænsning i, hvordan den ellipseformede kurve, som de frembringer, kan ligge i det transformerede udfoldningsparameterrum.

I en todimensionel udfoldning er der som forklaret i afsnit 5.5 essentielt kun en måde, som den ellipseformede banekurve kan ligge på. Som før nævnt kan kravene fra Hopfbifurkationen dog stadig have en yderligere betydning. De kan tvinge den elliptiske banekurve til at udarte til en linje, som eventuelt også kan tvinges til at ligge på en bestemt måde. Hvis man tager udgangspunkt i dobbeltboblen som stationær strømning, finder krav tilsvarende dem der ses ovenfor, og igen gælder det at der findes mindst en fri $b_{i,j}$ parameter. Der er altså ingen krav på banekurven i det todimensionelle udfoldningsparameterrum for dobbeltboblen.

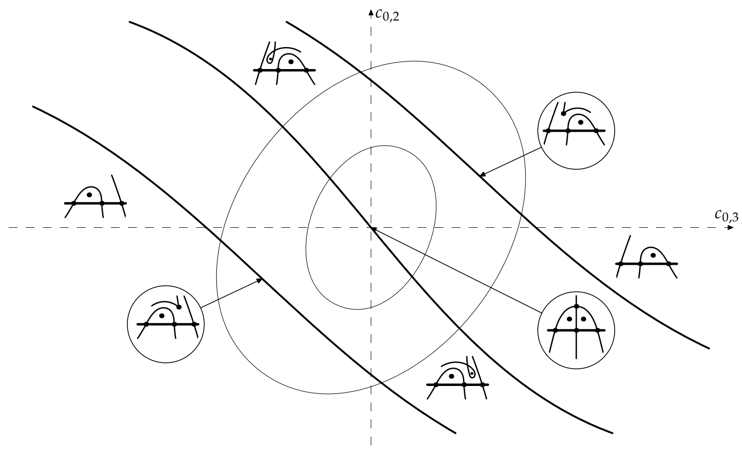
7.4 Strømningstopologier efter Hopfbifurkationen

På trods af, at der ikke har vist sig at være krav på Taylorkoefficienterne for perturbationsfeltet fra Hopfbifurkationen, er vi stadig i stand til at sige noget om væskestrømningen efter Hopfbifurkationen. Disse resultater bygger alle på en antagelse om, at det er den simple dobbeltboble, der Hopfbifurkerer.

I afsnit 6.5.5 diskuterede vi, hvordan man kan se et af de valgte snit i udfoldningsparameterrummet som en udfoldning af dobbeltboblen. Vi fandt, at den del af diagrammet som ligger helt inde ved origo kan tolkes som et bifurkationsdiagram for dobbeltboblen.

På denne baggrund kan vi konkludere, at der lige efter Hopfbifurkationen kun er en mulig tidslig sekvens af strømningstopologier, nemlig den som svarer til en ellipseformet kurve omkring origo i bifurkationsdiagrammet. Denne type kurve er illustreret på figur 7.1.

Man kan let forestille sig at denne første sekvens af topologier ved et højere Reynoldstal bliver erstattet af en mere kompliceret sekvens af topologier. Hvis man er i den heldige situation at bifurkationsdiagrammet også beskriver udfoldningen af dobbeltboblen for en større perturbation, er der et oplagt forløb af topologier, som strømningen kan overgå til. Dette er også illustreret på figur 7.1. Det skal understreges, at vi ikke teoretisk kan bevise, at denne sekvens af topologier vil opstå, vi mener blot at det er sandsynligt, hvis den faktiske dobbeltboble strømning ligner den trunkerede dobbeltboble til passende høj orden. Man kan naturligvis fortsætte på denne måde (se afsnit 8.3) og komme med andre gæt på dynamikker, men disse første og mest oplagte gæt viser sig at være af speciel interesse. (se afsnit 7.5).



Figur 7.1 Illustration af topologiens tidslige udvikling efter en Hopfbifurkation af den simple dobbeltboble. Den inderste ellipsekurve illustrerer et forløb, som *må* eksistere lige efter Hopfbifurkationen. Den yderste ellipsekurve illustrerer et forløb som kan opstå, hvis den simple dobbeltboble ligner den trunkerede dobbeltboble til passende høj orden. Figuren viser et udsnit af bifurkationsdiagrammet i figur 6.5.

7.5 Sammenligning med eksisterende simulerings resultater

I dette afsnit sammenligner vi vores resultater med de faktiske strømlinjemønstre i den periodiske strømning bag en cylinder.

I Petersen [2002a] præsenteres strømlinjetopologier, som er fremkommet på baggrund af numeriske simuleringer af strømningen bag en cylinder. Simulereringerne er lavet med speciel fokus på at analysere, hvilke bifurkationer, der forekommer, samt at bestemme ved hvilket Reynoldstal disse bifurkationer finder sted. Simuleringerne er lavet i to dimensioner, og er udført i hele det område, hvor strømningen er todimensionel [Petersen, 2002b]. Det vil sige, op til et Reynoldstal på omkring 200, (jvf. afsnit 1). Simuleringerne er udført i programmet Ellipsys, der er udviklet på DTU og RISØ med henblik på at løse fluidmekaniske problemer [Petersen, 2002a].

Vi vil sammenligne vores data med disse simuleringsdata med det udgangspunkt, at de giver et ægte billede af, hvordan strømningerne ser ud i virkeligheden. Det vil selvfølgelig aldrig være helt sandt, idet simuleringsdata også er en form for modeldata. For eksempel kan simuleringer i to dimensioner ikke sige noget om, hvornår tredimensionelle effekter får betydning. Fordelen ved de numeriske data, frem for ægte eksperimentelle data, er at det er langt mere ukompliceret at bestemme de instantane strømlinjebilleder på baggrund af disse.

7.5.1 Kort resumé af simuleringsresultaterne

I simuleringerne findes den simple stationære symmetriske strømning ved lave Reynoldstal (jvf. figur 1.1). Ved Reynoldstal omkring 6 ses den topologiske bifurkation til dobbeltboblen. Ved denne bifurkation vedbliver strømningen at være symmetrisk og stationær.

Den dynamiske bifurkation ses omkring Reynoldstal 42. Ved denne bifurkation går strømningen fra at være stationær til at være periodisk. Dette sker samtidig med at symmetrien i strømningen brydes og topologien af strømningen ændres.

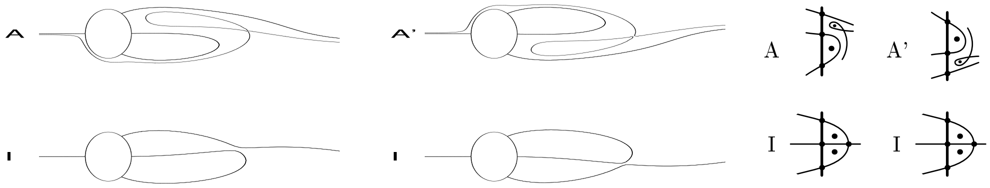
Ved Reynoldstal på omkring 46 ses endnu en bifurkation. Efter denne bifurkation er strømningen fortsat periodisk. Forandringen er at, en simpel tidslig sekvens af topologier erstattes af en mere kompliceret sekvens af topologier.

7.5.2 Topologierne i den første periodiske strømning

Den periodiske strømning, der opstår ved Reynoldstal 42 indeholder to topologisk ækvivalente, men spejlede strømningstopologier. Overgangen mellem disse strømningstopologier sker ved at dobbeltboblen passeres. Seperatricerne for de tre topologier er vist i figur 7.2. Den venstre del af figuren er en repræsentation af de faktiske numeriske data fra Petersen [2002a]. I den højre del af figuren vises vores stiliserede tegninger af de tilsvarende topologier. Forløbet af den periodiske strømning er ..A I A' I A I A'.. Dobbeltboblen, topologi I, er strukturelt ustabil, og den findes kun i det øjeblik strømningen går fra topologi A til topologi A'.

Det ses ved sammenligning med figur 7.1, at den periodiske strømning, som ifølge Petersen [2002a], opstår lige efter den stationære symmetriske dobbeltboble præcis er den periodiske strømning vi forudså.

De antagelser, der lå til grund for vores forudsigelser, er altså konsistente med det faktiske billede af strømningerne. Det betyder, at antagelserne giver en mulig tolkning af dannelsen af den periodiske strømning bag en cylinder. Nemlig, at det sker som en Hopfbifurkation af en dobbeltboble, og at denne dobbeltboble faktisk er den simple dobbeltboble.



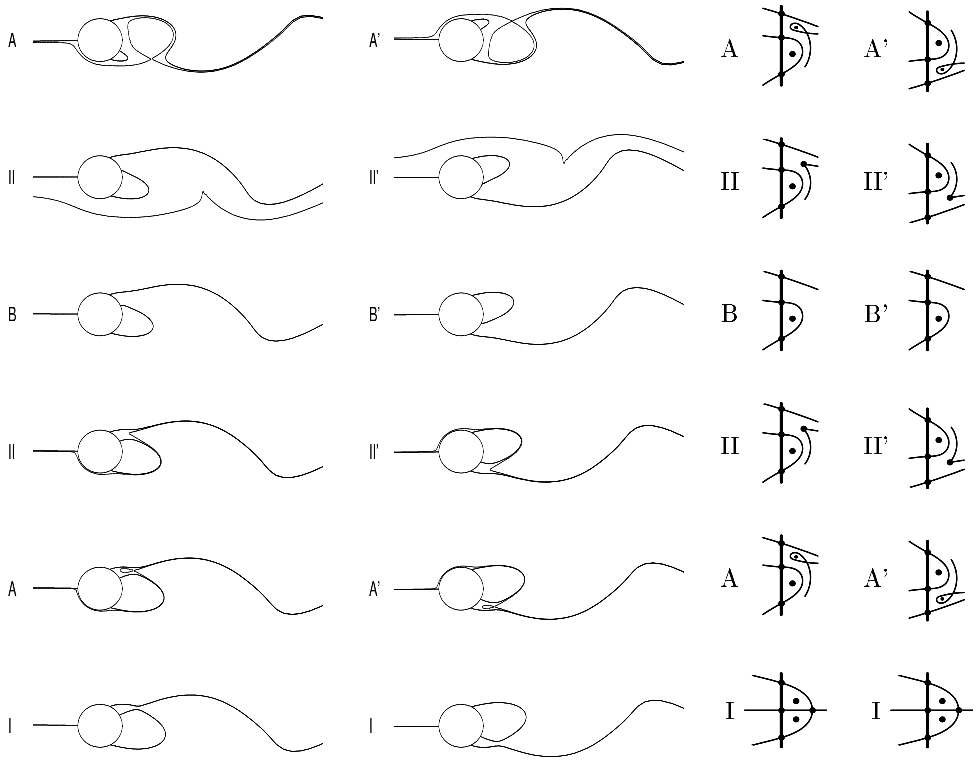
Figur 7.2 Til venstre: Seperatricer for numeriske simulationer af strømningen bag en cylinder, fra Petersen [2002a]. Til højre: Stiliserede illustrationer af de samme topologier. Når dobbeltboblen (topologi I) ikke er helt sammenhængende i den venstre del af figuren, skyldes det at der er tale om en repræsentation af numeriske data. I den periodiske strømning eksisterer dobbeltboblen kun i et infinitesimalt tidsinterval, og er derfor svær at indfange.

7.5.3 Topologierne i den anden periodiske strømning

Seperatricerne for de topologier, der findes i den periodiske strømning efter Reynoldstal på ca. 46 er vist i figur 7.3. Igen er den venstre del af figuren fra Petersen [2002a] og viser seperatricer lavet på baggrund af de numeriske data. Den højre del af figuren viser stiliserede tegninger af topologisk ækvivalente strømninger. Mærkerne indikerer som før, at der er tale om to spejlede versioner af den samme topologi. De forskellige strømninger opstår i rækkefølgen ..B II A I A′ II′ B′ II′ A′ I A II B.. Her er topologien I stadig den oprindelige dobbeltboble. Som tidligere er dobbeltboblen, den degenererede overgangstopologi mellem de spejlede topologier A og A′.

II og II′ er degenererede, fordi de indeholder et degenereret kritisk punkt i væsken. II eksisterer i overgangen mellem topologi A og B, og tilsvarende er II′ overgangstopologien mellem A′ og B′. Denne anden sekvens af topologier svarer til den sekvens af topologier, som vi diskuterede i afsnit 7.4. Det vil sige, at det er den anden sekvens af topologier, der vil opstå, hvis bifurkationsdiagrammet i figur 6.5 (se også figur 7.1) også beskriver udfoldningen af dobbeltboblen for større perturbationer.

Samlet set passer de resultater vi har fundet ved at analysere mulige topologier, og mulige baner i parameterrummet, for periodiske strømninger i nærheden af dobbeltboblen altså fuldstændigt med, de strømninger der rent faktisk findes bag cylinderen.



Figur 7.3 Seperatricerne for de topologier, der findes i den periodiske strømning ved Reynoldstal 100. Den venstre del af figuren er fra Petersen [2002a] og viser seperatricer lavet på baggrund af de numeriske data. Den højre del af figuren viser stiliserede tegninger af topologisk ækvivalente strømninger.

8 Diskussion af casen

Resultaterne i kapitel 7 er fremkommet på baggrund af to antagelser om systemet. Dels antages det, at den periodiske strømning opstår i forbindelse med en perturbation af den simple dobbeltboble. Dels antages det, at overgangen til periodisk strømning sker ved en Hopfbifurkation.

På baggrund af numeriske data ses det, at den faktiske strømning er i overensstemmelse med disse resultater. Det betyder ikke at vi har vist, at vores antagelser er opfyldt, men vi har vist, at de giver et muligt og simpelt udgangspunkt for at forstå strømningen.

8.1 Typen af dobbeltboblens degenererethed

Det er en eksperimentel kendsgerning, at den stationære strømning før bifurkationen til periodisk strømning har en dobbeltboble topologi. Hvis denne dobbeltboble har samme type degenererethed, som den simple dobbeltboble, vil den som diskuteret i afsnit 6 være strukturelt stabil under symmetriske perturbationer, og ustabil hvis der tillades asymmetriske perturbationer.

Teoretisk set er det imidlertid ikke umuligt, at den virkelige dobbeltboble kan have yderligere degenereretheder end den simple dobbeltboble. F.eks. kan et af de kritiske punkter ved væggen være degenereret lige inden bifurkationen til periodisk strømning. I så fald ville den udfoldning vi finder for dobbeltboblen være indlejret i et tre- eller højeredimensionelt parameterrum. Det ville betyde, at der kunne findes andre udfoldninger af dobbeltboblen.

Vi kan derfor ikke konkludere, at de topologier der findes i Petersen [2002a] for den første periodiske strømning[1], er de *eneste* topologier, der kan findes lige ved siden af[2] den stationære dobbeltboble bag cylinderen. Vi kan "kun" konkludere dette, hvis dobbeltboblen faktisk er den simple dobbeltboble, det vil sige den mindst degenererede stømning med en dobbeltboble topologi. Vi har ingen mulighed for at afgøre, om det er tilfældet, men da de numeriske resultater stemmer overens med forudsigelserne fra den simpleste topologiske model, betyder det, at der ikke er behov for en mere kompliceret topologi for at indfange fænomenet. Det er altså helt oplagt konsistent og sandsynligt, at

[1] De topologier der benævnes A og A' i slutningen af sidste kapitel.

[2] Med "lige ved siden af" menes her, den første topologi, der opstår ved en vilkårlig lille perturbation af strømningen.

den dobbeltboble, der findes bag cylinderen faktisk er af samme type som den simple dobbeltboble, vi har analyseret.

I diskussionen om hvorvidt, vi analyserer den "rigtige" dobbeltboble, minder den topologiske fluidmekanik om anden matematisk modellering, idet man altid vil søge at indfange de væsentligste af egenskaberne ved et fænomen med udgangspunkt i den simplest mulige model og matematiske beskrivelse.

8.2 Hopfbifurkationen

På baggrund af antagelsen om at bifurkationen til periodisk strøming sker ved en Hopfbifurkation fik vi følgende resultat. Den periodiske strømning kan forstås som en lukket banekurve i et parameterrum, og når den periodiske strømning dannes vil den til første orden ligge rundt om den stationære strømning den dannes fra. Specielt for kodimension to udfoldningen af dobbeltboblen betyder det, at den periodiske strømning, lige når den opstår, nødvendigvis må vedblive at passere dobbeltboblen.

Hvis man undlod antagelsen om Hopfbifurkationen, men blot antog at der var en eller anden bifurkation fra dobbeltboblen til en periodiske strømning, ville det også give anledning til en lukket banekurve i bifurkationsdiagrammet for dobbeltboblen. Dette skyldes følgende to forhold. For det første kan alle strømninger, der er tilstrækkelig tæt på dobbeltboblen, repræsenteres ved et punkt i udfoldningsdiagrammet, og da strømningerne udvikler sig kontinuert i tiden, vil den periodisk strømning i starten være tæt på dobbeltboblen. For det andet vil en periodisk strømning altid svare til en lukket banekurve i løsningsrummet til Navier-Stokes ligning, og en lukket banekurve i løsningsrummet oversætter til en lukket banekurve i parameterrummet[3].

Uden antagelsen om Hopfbifurkationen ville det imidlertid være muligt, at centrum af banekurven flyttede sig hurtigere væk fra dobbeltboblen end radius af banekurven voksede. Det ville så betyde, at den periodiske strømning ikke nødvendigvis ville passere dobbeltboblen.

Randbetingelserne for strømningen bag en cylinder er imidlertid symmetriske. Fysisk set er det derfor forventeligt, at den tidsmidlede strømning vil vedblive at være symmetrisk. Det vil igen betyde, at den lukkede banekurve i parameterrummet vil være tvunget til at ligge omkring dobbeltboblen.

Vi mener derfor at antagelsen om, at det faktisk er den simple dobbeltboble, der er bag cylinderen før bifurkationen til periodisk strømning, er tilstrækkelig til at forudsige den første periodiske strømning, som findes i Petersen [2002a].

[3]Når hastighedsfeltet efter periodetiden er vendt tilbage til udgangspunktet, vil alle de Taylorkoefficienter (eller parametre af en anden type), som karakteriserer strømningen, også antage de oprindelige værdier igen. Dette vil give en lukket kurve i et bifurkationsdiagram såfremt strømningen ikke passerer nogle degenereretheder som ikke er beskrevet ved det pågældende diagram. I den konkrete situation vil det altså gælde, så længe strømningen er tilstrækkelig tæt på dobbeltboblen.

Antagelsen om at bifurkationen er en Hopfbifurkation er altså ikke strengt nødvendig, men de beskrevne konsekvenser af denne antagelser er helt konsistent med de numeriske resultater. Samtidig tilbyder Hopfbifurkationen en præcis forståelsesramme for udviklingen af den periodiske strømnings radius i parameterrummet, eller tilsvarende i funktionsrummet.

8.3 Andre mulige topologier og dynamikker

Selv med antagelsen om at det er den simple dobbeltboble, som eksisterer i strømningen bag cylinderen lige inden overgangen til periodisk strømning, kan vi ikke forudsige noget om, hvordan den periodiske strømning vil se ud på længere sigt. Dette skyldes den lokale karakter af den topologiske fluidmekanik.

Udfoldningen af dobbeltboblen fortæller os, at det der ligger nærmest dobbeltboblen altid vil være topologien med sløjfen, den der betegnes A i slutningen af sidste kapitel. Derfor vil den som før skrevet altid være den første strømning som fås når dobbeltboblen brydes.

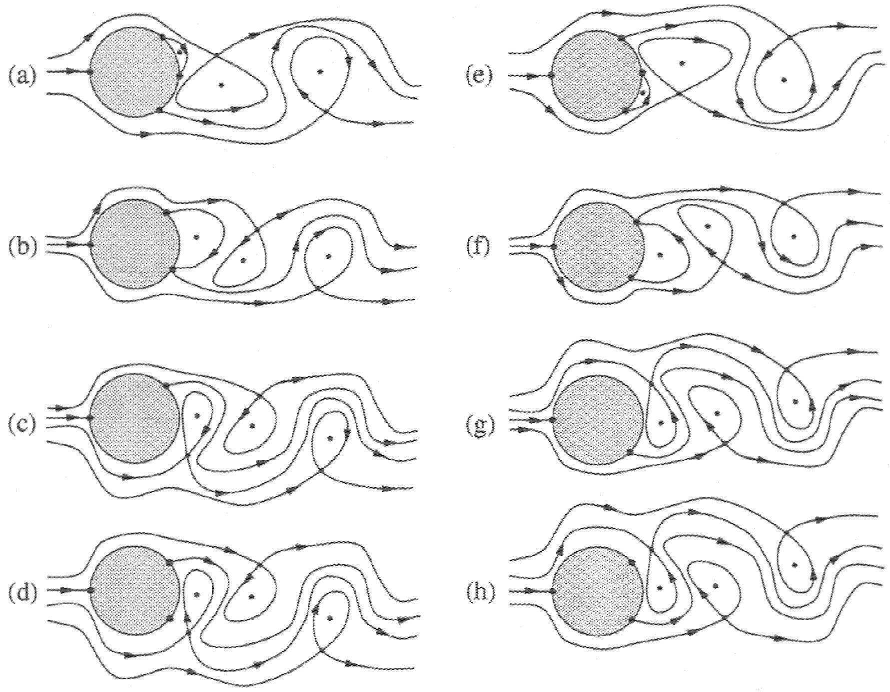
Udfoldningen af den organiserende strømning, giver at topologien uden sløjfen (den der betegnes B i slutningen af sidste kapitel) kan findes vilkårlig tæt på dobbeltboblen. Dette resultat gælder imidlertid kun, når dobbeltboblen betragtes som en udfoldning af den organiserende strømning. Det betyder, som vi før har været inde på, at man ikke kan tillade sig at antage noget om størrelsen på dobbeltboblen.

Derfor er det ikke teoretisk muligt, at afvise at den første periodiske strømning der findes i Petersen [2002a], kan bifurkere til en helt anden periodisk strømning end den, der rent faktisk opstår. I praksis er der, som præsenteret i afsnit 7.5.3, alligevel overensstemmelse mellem den næste periodiske strømning, man kan finde i udfoldningsdiagrammet for dobbeltboblen, og den periodiske strømning, der faktisk forekommer i de numeriske resultater.

Denne overensstemmelse tyder på, at den virkelige dobbeltboble faktisk ligner den trunkerede dobbeltboble så meget at de højereordensled, som er i den virkelige strømfunktion, ikke når at få betydning inden bifurkationen fra den første periodiske strømning til den anden.

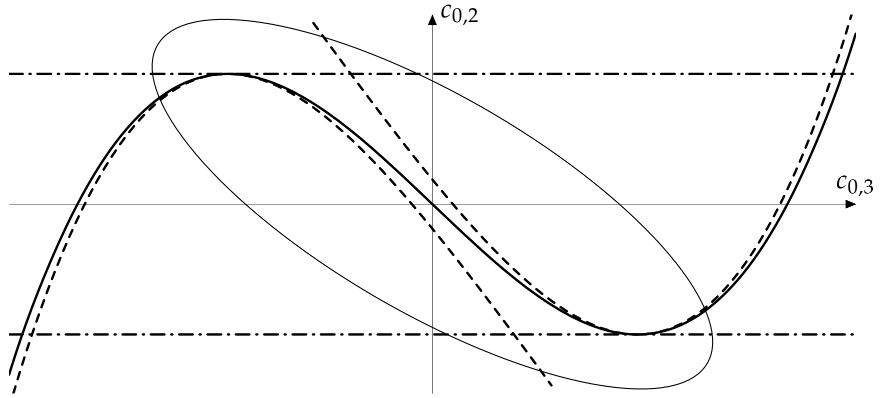
Hvis den virkelige dobbeltboble er den simple dobbeltboble betyder det desuden, at den topologiske degenererethed, der giver anledning til den første bifurkation væk fra dobbeltboblen udelukkende er knyttet til at dobbeltboblen er globalt degenereret. Der er altså tale om en degenererethed, der opstår fordi strømningen ændrer karakter fra at være symmetrisk til ikke længere at være det. Det er ikke de enkelte kritiske punkter, der i sig selv ændrer karakter og bliver degenererede.

Begrænsningen af den topologiske fluidmekaniks forudsigelsesevne, kan illustreres ved at betragte et ofte refereret forslag til forløbet af topologierne i den periodiske strømning bag en cylinder fra Perry et al. [1982]. Dette forslag ses i figur 8.1, og i figur 8.2 er der skitseret en banekurve i udfoldningsdiagrammet for dobbeltboblen som *lokalt* ved cylindervæggen giver anledning til den samme sekvens af topologier. Der er en uoverensstemmelse i kraft af at sløjferne i figuren i Perry et al. [1982], fortsætter ud i væsken. Dette er ikke muligt, hvis strømningen skal forstås ud fra udfoldningen af dobbeltboblen. Imidlertid er der en længere diskussion i Perry et al. [1982] om, at positionen af de kritiske punkter afhænger af, hvilket referencesystem strømningen betragtes fra. Derfor finder vi det i første omgang mest relevant at se på, hvad der sker lokalt ved cylindervæggen i figuren fra Perry et al. [1982].



Figur 8.1 Illustration af stømningen bag en cylinder som den er forslået i Perry et al. [1982]. Figuren er fra Hartnack [1999b].

Der er ikke noget i vores analyse, der peger på at den sekvens af topologier, der ville fremkomme ved at følge banekurven i figur 8.2 ikke kan eksistere bag en cylinder. Det eneste man kan sige, er at det ikke vil være dette forløb, der forekommer som den første periodiske strømning efter en stationær simpel dobbeltboble. Det er umuligt at forudsige, at den anden periodiske strømning, der findes i Petersen [2002a] rent faktisk eksisterer, mens den periodiske strømning foreslået i Perry et al. [1982] ikke gør. Det eneste man kan sige i den retning er, at for en strømning, der stammer fra en bifurkation af dobbeltboblen vil den anden periodiske strømning i Petersen [2002a] opstå før den strømning som foreslås i Perry et al. [1982]. Endvidere kan man sige, at det er mindre sandsynligt at dobbeltbobleudfoldningen giver en tilstrækkelig forståelsesramme jo længere væk fra centrum man bevæger sig. For eksempel vil



Figur 8.2 Den ellipseformede kurve viser en bane i bifurkationsdiagrammet for dobbeltboblen, som tæt på cylindervæggen har et forløb i topologierne, der svarer til forslaget fra Perry et al. [1982]. Se også figur 6.5 og 8.1.

strømningen, som nævnt i indledningen, på et tidspunkt blive tredimensionel. Hvis det ikke allerede er sket før, vil tolkningen i form af dobbeltboble udfoldningen på dette tidspunkt falde til jorden. På baggrund af de numeriske data fra Petersen [2002a] ser det ud til, at den sekvens af strømlinjetopologer som bliver foreslået i Perry et al. [1982] ikke opstår i den todimensionelle strømning.

9 Opsamling

9.1 Generelle resultater

Baggrunden for dette projekt er, som beskrevet i indledningen, et ønske om at knytte viden om den tidslige dynamik i et fluidmekanisk system sammen med viden om de mulige topologier i strømningen.

Fra topologisk fluidmekanik er det muligt at få en udfoldning af strømningen ved et kritisk punkt. Det vil sige, at man finder alle strømningstopologier, som kan opstå ved en vilkårlig lille perturbation af den oprindelige strømningstopologi. Denne udfoldning kan beskrives ved en række udfoldningsparametre, og et bifurkationsdiagram.

Udgangspunktet for det teoretiske arbejde i dette projekt er den topologiske udfoldning af en strømning, samt den antagelse at denne strømning findes ved overgangen fra en stationær strømning til en tidslig periodisk strømning. Vi antager specielt, at overgangen kan beskrives som en Hopfbifurkation på Navier-Stokes niveau. Det antages desuden, at det er muligt at anvende en generaliseret form af Poincaré-Lindstedt rækkeudvikling til at beskrive den periodiske strømning.

Med disse antagelser har vi vist, at man til første orden kan beskrive den periodiske strømning efter bifurkationen, som en ellipseformet kurve i udfoldningsparameterrummet for den betragtede strømning. Ellipsen vil lige efter bifurkationen have de parameterværdier som svarer til den betragtede strømning som centrum. Vi har endvidere vist, at størrelsen på ellipsen vokser hurtigere efter Hopfbifurkationen end ellipsens centrum forskydes.

Vi har desuden vist, at man på baggrund af eksistensen af Hopfbifurkationen kan opstille et sæt af ligninger, som kan lægge bånd på, hvordan den ellipseformede banekurve kan ligge i udfoldningsparameterrummet. Resultatet er at man kan forudsige, hvilke sekvenser af strømningsmønstre, der kan findes i strømningen efter Hopfbifurkationen. Det er et interessant specialtilfælde når udfoldningsparameterrummet er todimensionelt. I dette tilfælde er der to muligheder: Den generelle situation, hvor banekurven er en ægte ellipse, og tilfældet hvor ellipsen udarter til en linje. I det generelle tilfælde er der kun en mulig sekvens af topologier, mens antallet af mulige sekvenser i det specielle tilfælde afhænger af det aktuelle bifurkationsdiagram. Med mindre der er krav fra de ligninger, som findes på baggrund af Hopfbifurkationen, er det svært at forestille sig at den udartede konfiguration opstår, hvorfor der i almindelighed kun er en mulig sekvens af topologier efter bifurkationen.

Overordnet har vi med de generelle resultater udvidet koblingen mellem dynamikken og topologien i et fluidmekanisk system. Hermed har vi vist, at man kan opnå en anden type information, end den man ellers får i topologisk fluidmekanik. I almindelighed giver topologisk fluidmekanik en oversigt over, hvilke overgange der kan være mellem de enkelte topologier. Udvidelsen er, at man kan give en oversigt over, hvilke tidslige sekvenser af topologier der kan eksistere i en periodisk strømning umiddelbart efter en Hopfbifurkation af en given strømning. I arbejdet med overgange fra stationær til periodisk strømning, vil man således på forhånd kunne vide, hvilke typer periodisk strømning der kan ledes efter.

Topologisk fluidmekanik er normalt ikke en disciplin, som forudsiger, hvad der *vil* ske, men derimod hvad der *kan* ske, og i dette aspekt har vores resultater samme karakter som topologisk fluidmekanik i almindelighed. En Hopfbifurkation af en degenereret strømning med kodimension to er imidlertid undtagelsen for dette. Her kan vores resultater give direkte forudsigelser af, hvilken sekvens af strømningstopologier, der vil opstå. Et eksempel på denne situation ses i den case, vi har behandlet.

I konkrete virkelige systemer afhænger rigtigheden af resultaterne i topologisk fluidmekanik af, at det er den rigtige topologiske beskrivelse af den faktiske fysiske strømning som benyttes. Det betyder, at man får et samspil mellem den matematiske beskrivelse af strømningen og den virkelige strømning. Når man udvider den topologiske fluidmekanik med antagelser og forudsigelser omkring dynamikken i systemet, udvides dette samspil naturligvis samtidigt.

9.2 Resultater angående casen

Som speciel anvendelse af den generelle teori har vi undersøgt strømning bag en cylinder. Strømningen er i denne sammenhæng interessant, fordi den præcis indeholder en overgang fra en stationær til en periodisk strømning. Denne overgang forekommer ved $\mathrm{Re} \simeq 42$.

Foruden denne dynamiske bifurkation er der ved $\mathrm{Re} \simeq 7$ en topologisk bifurkation i den stationære strømning. Her sker en overgang fra krybende strømning, ved helt lave Reynoldstal, til dobbelboble strømningen, som eksisterer helt op til $\mathrm{Re} \simeq 42$.

Med udgangspunkt i de topologiske karakteristika for strømningen ved den topologiske bifurkation har vi konstrueret den simpleste degenererede strømning med den pågældende topologi *den organiserende strømning*. Den organiserende strømning er blevet udfoldet, og vi har vist at, når man kræver, at udfoldningen skal bevare den grad af symmetri, som er i den organiserende strømning, findes en bifurkation mellem krybende strømning og strømningen med dobbeltboble topologi. Vi benævner den dobbeltboble strømning, som her opstår *den simple dobbeltboble*.

Vi har yderligere konstrueret den fuldstændige udfoldning af den organiserende strømning, og har fundet at den organiserende strømning har kodimension tre. I det tredimensionelle parameterrum finder vi den simple dobbeltboble strømning i origo af et bestemt todimensionelt snit. Hvis man befinder sig tilstrækkelig tæt på den organiserende strømning, kan man betragte dette snit som en udfoldning af den simple dobbeltboble strømning. Vi har endvidere argumenteret for, at den centrale del af bifurkationsdiagrammet kan tolkes som en udfoldning af den simple dobbeltboble strømning uafhængigt af afstanden til den organiserende strømning. Desuden mener vi, at hvis den faktiske dobbelboble strømning ligner strømningen svarende til den trunkerede simple dobbeltboble strømning til passende høj orden, vil større dele af diagrammet vise strømninger, der kan opstå ved passende store perturbationer af den faktiske dobbeltboble.

Den simple dobbeltboble er stabil under symmetriske perturbationer, og strømningerne i udfoldningen af den simple dobbeltboble, vil derfor først opstå når symmetrien i strømningen brydes. Dette sker ved overgangen til periodisk strømning.

Ved brug af den generelle teori har vi fundet, at der kun er en mulig sekvens af topologier i den periodiske strømning lige efter en Hopfbifurkation af den simple dobbbeltboble strømning. Desuden vil en antagelse om, at den periodiske strømning er symmetrisk, når den midles over tid, lede til en forudsigelse af den samme sekvens af topologier. Ved sammenligning med numeriske resultater ses det, at der er god overensstemmelse mellem den forudsagte og den fundne periodiske strømning.

Det er numerisk fundet [Petersen, 2002a], at der kort efter bifurkationen til den periodiske strømning (det vil sige for lidt højere Reynoldstal) er en bifurkation til en periodisk strømning, som involverer flere topologier. Vi har vist, at denne periodiske strømning er i særdeles god overensstemmelse med, hvad man kan forvente, hvis man tolker overgangen til periodisk strømning som en Hopfbifurkation af den simple dobbeltboble. De numeriske resultater viser desuden, at der ikke er yderligere bifurkationer til andre sekvenser, før strømningen bliver tredimensionel.

Det ses altså, at den undersøgte topologi (den organiserende strømning) indeholder både den topologiske bifurkation fra krybende strømning til dobbeltboble strømningen og en total udfoldning af dobbeltboble strømningenen, som er i overensstemmelse med resultater, der er fundet via computersimulering. Med udgangspunkt i den organiserende strømning er man dermed i stand til at beskrive de topologier og dynamikker, som findes i den todimensionelle strømning bag en cylinder.

At betragte strømningen bag en cylinder i den her foreslåede ramme giver alt i alt en konsistent og simpel forståelse af topologi og dynamik.

Kildehenvisninger

Arfken, G. B. & Weber, H. J. [1995]. *Mathematical methods for physicists*, 4th edn, Academic Press.

Bakker, P. G. [1991]. *Bifurcations in Flow Patterns*, Kluwer Academic Publishers.

Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. [1997]. *Elementary differential equations and boundary value problems*, sixth edn, John Wiley & Sons.

Brøns, M. [2001]. Streamline patterns and their bifurcations using methods from dynamical systems, *in* R. L. Ricca (ed.), *An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows*, Vol. 47 of *NATO SCIENCE SERIES: II: Mathematics, Physics and Chemistry*, Kluwer Academic Publishers.

Dyke, M. V. [1982]. *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press.

Goldstein, H. [1972]. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.

Grimshaw, R. [1990]. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Blackweel Scientific Publications.

Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983]. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.

Hartnack, J. N. [1999a]. Streamline topologies near a fixed wall using normal forms, *Acta Mechanica* **136**(1-2): 55–75.

Hartnack, J. N. [1999b]. *Structural changes in incompressible flow patterns*, PhD thesis, DTU.

Iooss, G. & Adelmeyer, M. [1992]. *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific.

Iooss, G. & Joseph, D. D. [1980]. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag.

Lautrup, B. [1999]. Kompendium til Goldstein. Noter til brug ved: Kursus i Analytisk Mekanik (Fysik 212),NBI, KU.
URL: *www.nbi.dk/~lautrup/analytisk/guide.ps*

Malina, F. J. [2002]. Kármán, theodore von, *Encyclopædia Britannica*. Accessed May 21, 2002.
URL: *http://search.eb.com/eb/article?eu=45787*

Marsden, J. E. & McCracker, M. [1976]. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag.

Perry, A. E., Chong, M. S. & Lim, T. T. [1982]. The vortex-shedding process behind two-dimensional bluff-bodies, *J. Fluid Mech* **116**: 77–90.

Petersen, R. [2002a]. *Dynamical systems and structures in the flow around a cylinder*, Master's thesis, DTU. No. 2002-01.

Petersen, R. [2002b]. Personlig kommunikation.

Robinson, C. [1999]. *Dynamical Systems*, CRC Press.

Williamson, C. H. K. [1996]. Vortex dynamics in the cylinder wake, *Annu. Rev. Fluid. Mech* **28**: 477–539.

A Poster

I dette appendiks findes en kopi af en poster uarbejdet på baggrund af dette projekt. Posteren blev oprindeligt præsenteret på Dansk Fysisk Selskabs årsmøde 2002.

Noter til den elektroniske udgave

Indholdet af dette appendiks er ikke med i denne elektroniske udgave af teksten, det kan hentes særskilt på:
`http://dirac.ruc.dk/~boj/publikationer.html#topologi`

B Normalformstransformation og udfoldning (Maple ark)

I dette appendiks præsenteres et Maple 7.0 ark som eksempel på, hvordan vi har foretaget normalformstransformationer og udfoldninger. Konkret indeholder arket beregningerne på den symmetribevarende udfoldning af den organiserende strømning (se afsnit 6.3). Dette eksempel er nogenlunde overskueligt, samtidigt med at Maple arket illustrerer de fleste af de operationer, vi har anvendt.

Langt de fleste af de funktioner som vi benytter findes også i ældre versioner af Maple, men den plotte funktion som vi benytter til at få overblik over seperatricer med (`plot_real_curve`) findes først i Maple 7.

Noter til den elektroniske udgave

Indholdet af dette appendiks er ikke med i denne elektroniske udgave af teksten, det kan hentes særskilt på:
`http://dirac.ruc.dk/~boj/publikationer.html#topologi`