Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Tirsdag 28/6-2011, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af 3 opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (35 %)

I de følgende 3 delspørgsmål betragtes gas hvor entropien er givet ved:

$$S = Nk_B \left[\ln \left(\frac{V}{NV_Q} \right) + 5/2 \right] \tag{1}$$

N er antallet af atomer, V volumen og V_Q er "kvante volumenet" som udelukkende er en funktion af temperaturen. Energien af gasser er givet ved $E = 3/2 N k_B T$.

I alle delspørgsmål betragtes gassen som værende i en ydre isolerende kasse, som er delt op på forskellige måder i de tre delspørgsmål. Figur 1 illustrerer de betragtede situationer.

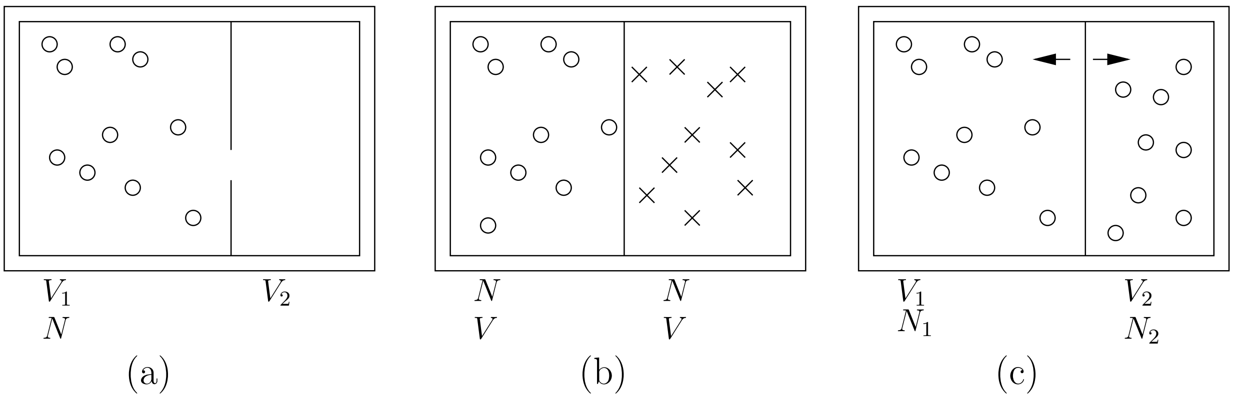

Figure 1. De 3 situationer som betragtes i spørgsmål a–c

Betragt først en situation hvor en mængde gas N er i volumen V_1 adskilt fra et tomt volumen V_2 (som skitseret på figur 1a.) Gassen tillades nu at ekspandere ind i det tomme volumen så den til sidst fylder det hele.

a) Angiv ændringen i energi og temperatur af gassen, og beregn ændringen i entropi ved ekspansionen. Kommenter på sammenhængen mellem varme og entropi i denne proces.

Antag nu at gassen består af to forskellige typer af atomer som man kan kende forskel på. Der er N atomer af hver slags. Det samlede volumen kan opdeles i to lige store dele med en varmeledende væg. Betragt nu en situation hvor vi først har de to typer atomer adskilt af væggen, og derefter en situation hvor der ikke er nogen væg.

b) Beregn entropien af det samlede system i situationen hvor der er en væg (som skitseret på figur 1b) og i situationen hvor væggen er fjernet. Kommenter på hvor entropiforskelen kommer fra.

Betragt til sidst en situation hvor gassen er delt op af en væg der kan flytte sig let og er varmeledende. Volumen af de to dele kaldes hhv. V_1 og V_2 og antallet af partikler er hhv. N_1 og N_2. Situationen er skitseret på figur 1c.

c) Beregn forholdet mellem V_1 og V_2 i termodynamisk ligevægt.

Problem 2 (30 %)

a) Vis at

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{2}$$

(**HINT:** Betragt først V(P,T) og dernæst T(S,P))

b) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske kompressibilitet (κ_S), den isoterme kompressibilitet (κ_T), den isobare udvidelseskoefficient (α_P) og den isobare varmekapacitet (C_P):

$$\kappa_T - \kappa_S = \frac{VT\alpha_P^2}{C_P}. \tag{3}$$

c) Beregn κ_S for en diatomisk ideal-gas.

Problem 3 (35 %)

Betragt et system bestående af N uafhængige atomer i et gitter. Hvert atom kan være i 6 tilstande: 2 med energi 0ϵ, 1 med energi 1ϵ og 3 med energi 3ϵ, hvor ϵ er en positiv konstant ($\epsilon > 0$).

a) Find Helmholtz fri energi som funktion af T.

b) Find ligevægtsentropien som funktion af temperaturen.

c) Beregn $T = 0$ og $T = \infty$ grænserne af entropien, diskuter resultaterne i relation til hvad man forventer i disse grænser.

Betragt nu et system bestående af et enkelt atom $N = 1$. Til hver mikrotilstand hører nu et "spin" (B) sådan at til tilstandene med energi 0ϵ er $B = -1$, til tilstandene med energi 1ϵ er $B = 0$ og til tilstandene med energi 3ϵ er $B = 1$.

d) Beregn middelværdien af B i termisk ligevægt og angiv værdien i grænserne $T = 0$ og $T = \infty$. Kommenter på grænserne.

Antag nu at det samlede spin af et system med N atomer findes som summen af spinnet for de enkelte atomer,

e) Angiv det samlede middelspin for N atomer som funktion af temperaturen.

Eksamenssættet er slut.