Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Mandag 18/1-2010, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt. Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (35%)

a) Vis at total-differentialer for entropien, kan skrives ved den isobare varmekapacitet og den isobare udvidelseskoefficient på følgende måde:

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V \alpha_P dP.$$

Betragt nu en isoterm reversibel trykændring fra P_i til P_f.

b) Vis at den tilførte varme er givet ved den isobare udvidelseskoefficient som:

$$Q = -T \int_{P_i}^{P_f} V \alpha_P dP,$$

c) Vis at det udførte arbejde er givet ved den isoterme kompressibilitet som:

$$W = \int_{P_i}^{P_f} V P \kappa_T dP.$$

I det følgende antages α_P og κ_T at være trykuafhængige (dette er en god antagelse for væsker).

Betragt nu en væske med følgende karakteristika: $T = 300\text{K}$, $V = 1 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$, $\alpha_P = 1.8 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ og $\kappa_T = 4 \cdot 10^{-11}\text{Pa}^{-1}$

Trykket ændres isotermt og reversibelt fra atmosfærisk tryk til 1000atm.

d) Beregn den tilførte varme og det udførte arbejde ved tryk ændringen. Kommenter på det fundne resultat.
(**Hint:** Da volumen-ændringen er meget lille pga. den lille isoterme kompressibilitet, kan volumen antages at være konstant i evalueringen af integralerne.)

Opgave 2 (30%)

a) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske trykkoefficient, den isochore trykkoefficient, den isochore varmekapacitet og den isoterme kompressibilitet:

$$\beta_S = \beta_V + \frac{C_V}{T V \beta_V \kappa_T}$$

(**Hint:** Du kan *evt.* udnytte følgende sammenhæng: $C_P = C_V + T V \alpha_P \beta_V$)

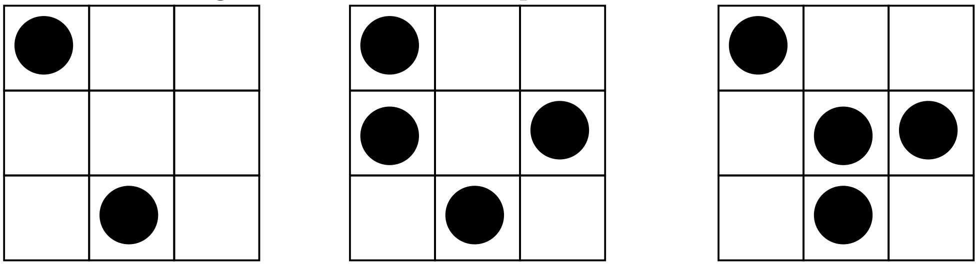
b) Beregn β_S for en diatomisk ideal-gas.

Opgave 3 (35%)

Betragt et model-system som har N pladser og n identiske partikler
(der kan maximalt være én partikkel på en given plads).

Energien af systemet afhænger kun af antallet af partikler. Hver partikkel tilføre $\epsilon > 0$ energi til systemet.

Nedenstående figur illustrerer 3 eksempler.



$N = 9,\ n = 2$ $\quad E = 2\epsilon$

$N = 9,\ n = 4$ $\quad E = 4\epsilon$

$N = 9,\ n = 4$ $\quad E = 4\epsilon$

a) Vis at tilstandssummen generelt for et givet N og n kan skrives som:

$$Z_n = \binom{N}{n} e^{-\beta\epsilon n}$$

b) Find et generelt udtryk for Helmholtz fri energi for et givet N og n.

Vi betragter nu modellen for fastholdt størrelse (N) og temperatur, men lader antallet af partikler (n) variere.
(Du kan f.eks. tænke på det, som om modellen er i kontakt med et partikel reservoir, hvor der frit kan flyde partikler mellem reservoiret og modellen — eller at "partiklerne" repræsenterer objekter der kan opstå og forsvinde, f.eks. fejlsteder i en krystal).

c) Vis at i termisk ligevægt er antallet af partikler givet ved:

$$n = \frac{N}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

og beregn $\frac{n}{N}$ for $T \to 0$ og $T \to \infty$.

(**Hint:** Du må antage at $N \gg 1$, $n \gg 1$ og $(N - n) \gg 1$.)

d) Giv en fysisk forklaring på hvorfor der i termisk ligevægt generelt er partikler i modellen, selvom den tomme model ($n = 0$) ved enhver temperatur har den laveste energi (nemlig $E_{n=0} = 0$).
Kommenter desuden på de fundne grænseværdier for $\frac{n}{N}$.

Slut på opgavesættet